

طبقه‌بندی تصاویر فراطیفی با استفاده از مدل آمیخته‌ی گاوسی و الگوریتم نمونه‌گیر گیبز

حمید قنبری^{۱*}، سعید همایونی^۲، عبدالرضا صفری^۳، عادل محمدپور^۴

^۱ کارشناس ارشد سنجش از دور - دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی -

دانشگاه تهران

hamid.ghanbari@ut.ac.ir

^۲ استادیار گروه جغرافیا، مطالعات محیطی و ژئوماتیک - دانشگاه اتاوا - کانادا

saeid.homayouni@uottawa.ca

^۳ دانشیار دانشکده مهندسی نقشه‌برداری و اطلاعات مکانی - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

asafari@ut.ac.ir

^۴ دانشیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - دانشگاه صنعتی امیرکبیر

adel@aut.ac.ir

(تاریخ دریافت اردیبهشت ۱۳۹۵، تاریخ تصویب تیر ۱۳۹۶)

چکیده

با پیشرفت‌های فناوری سنجش از دور و تولید داده‌های فراطیفی با اطلاعات طیفی فراوان، استفاده از این داده‌ها جهت مطالعه دقیق پدیده‌ها به سرعت در حال گسترش است. تصاویر فراطیفی به دلیل نمایش گسترده خصوصیات طیفی عوارض و پدیده‌های سطح زمین در بسیاری از علوم زمین مورد توجه قرار گرفته‌اند. یکی از مهمترین کاربردهای تصاویر فراطیفی، طبقه‌بندی آنها و تولید نقشه‌های پوشش زمینی بدون نیاز به داده‌های واقعیت زمینی است. در بین روش‌های گوناگون طبقه‌بندی بدون نظارت، استفاده از مدل آمیخته گاوسی به دلیل عملکرد بهتر و دقت بالا در خوشه‌بندی داده‌های فراطیفی، مورد توجه قرار گرفته است. مهمترین بخش یک مدل برآورد پارامترهای آن است. تاکنون روش‌های متفاوتی به منظور تخمین پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی ارائه شده است. یکی از پرکاربردترین این روش‌ها در سال‌های اخیر، الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی می‌باشد. این الگوریتم علی‌رغم سرعت بالا و دقت کلی قابل قبول، از مشکل دقت پایین در طبقه‌بندی مناطق با وسعت پایین رنج می‌برد که این مشکل در مناطق شهری نمود پیدا می‌کند. در این پژوهش نویسندگان با معرفی الگوریتم نمونه‌گیر گیبز علاوه بر تلاش برای بالابردن دقت کلی، سعی در فائق آمدن بر مشکل برخورد با عوارض کوچک دارند. از طرف دیگر، استفاده از تمام باندهای تصویر فراطیفی در فرآیند طبقه‌بندی به علت همبستگی بالای بین باندها و همچنین افزایش زمان محاسبات توصیه نمی‌گردد. یکی از راهکارهای رفع این مشکل، استفاده از روش‌های کاهش ابعاد به منظور بهبود دقت طبقه‌بندی است. در این پژوهش از روش‌های کاهش ابعاد آنالیز مولفه‌های اصلی و نگاشت تصادفی استفاده شد. به منظور مقایسه و ارزیابی صحت روش‌های پیشنهادی در این پژوهش، دو داده فراطیفی واقعی شناخته شده Pavia University و Salinas و یک داده شبیه‌سازی شده مورد استفاده قرار گرفت. نتایج آزمایشات صورت گرفته نشان از برتری به کارگیری الگوریتم نمونه‌گیر گیبز نسبت به الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی به منظور تخمین پارامترهای مدل آمیخته گاوسی و همچنین دقت بالاتر این الگوریتم در طبقه‌بندی عوارض کوچک دارد.

واژگان کلیدی: طبقه‌بندی، تصاویر فراطیفی، مدل آمیخته گاوسی، نمونه‌گیر گیبز، کاهش ابعاد

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

یکی از زمینه‌های پژوهشی که سالهاست توجه محققین رشته‌های مختلف را به خود جلب کرده است طبقه‌بندی اطلاعات است. این موضوع تحقیقاتی با ورود عصر ماهواره‌ها، ذهن محققین سنجش از دور را نیز به خود معطوف نموده و یکی از موضوعات مهم و اساسی در این حوزه است. با ورود تصاویر فراطیفی و حجم بالای اطلاعات موجود در آنها، نیاز به الگوریتم‌هایی که علاوه بر دقت بالا، قادر به حل مسائل طبقه‌بندی با سرعت بیشتری باشند، احساس می‌شود.

تاکنون الگوریتم‌های متنوعی به منظور طبقه‌بندی تصاویر سنجش از دوری ارائه شده است. یکی از این الگوریتم‌ها که به تازگی در زمینه خوشه‌بندی داده‌های با بعد بالا به کار گرفته شده است مدل آمیخته‌ی گاوسی^۱ است [۱]. پس از نتایج خوبی که این روش در مورد داده‌های با حجم زیاد ارائه نمود، محققین سنجش از دوری در پی بررسی این روش در مورد تصاویر فراطیفی برآمدند [۲].

مدل آمیخته گاوسی زیرمجموعه و یکی از پرکاربردترین مدل‌های آمیخته متناهی^۲ است. مدل آمیخته‌ی متناهی اولین بار در قرن نوزدهم وارد ادبیات آمار شد، [۲] و [۳]. از جمله مدلهای آمیخته متناهی می‌توان به مدل آمیخته پواسن برای گروه‌بندی اسناد در امر بازیابی اطلاعات و همچنین مدل آمیخته فیشرفر برای تحلیل متون و آزمایش‌های ژنتیکی اشاره کرد. مشهورترین مدل آمیخته متناهی، مدل آمیخته گاوسی است، [۴] و [۵]. از آن‌جا که مهمترین بخش یک مدل برآورد پارامترهای آن است، روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای مدل آمیخته ارائه شده است. به این منظور، Pearson در سال ۱۸۹۴ برای برازش مدل به داده‌هایی که نسبت طول پیشانی به طول بدن ۱۰۰۰ خرچنگ را بیان میداشتند و توسط ولدن در سال ۱۸۹۲ جمع‌آوری شده بودند، از مدل آمیخته گاوسی تک متغیره استفاده کرد [۶]. روشی که Pearson برای برآورد گشتاوری پارامترهای مدل در نظر گرفته، برای داده‌های چند متغیره، نیاز به محاسبات زیادی دارد که در عمل کاربرد چندانی نخواهد داشت. بدین منظور از روش بیشینه درست‌نمایی برای برآورد پارامترهای مدل استفاده می‌شود.

این برآوردگر تحت برقراری شرایط نظم کارتر از برآوردگر گشتاوری است [۷].

Dempster و همکاران در سال ۱۹۹۷ الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی را ارائه دادند. این الگوریتم روشی برای محاسبه‌ی برآوردگر بیشینه درست‌نمایی است، هنگامی که داده گمشده وجود داشته باشد یا روش‌های ساده‌ی بهینه‌سازی با شکست مواجه شوند [۸]. از مهمترین کاربردهای الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی برآورد پارامترهای مدل آمیخته گاوسی است. برای یافتن پارامترهای مدل آمیخته گاوسی در این روش علاوه بر مجموعه مشاهدات، از متغیر تصادفی برنولی Z_i استفاده می‌شود. به Z_i متغیر پنهان^۳ یا برجسب گفته می‌شود. به عبارت ساده‌تر با متناظر کردن یک برجسب به مشاهده x_i می‌توان نشان داد که این مشاهده به کدام زیر جامعه تعلق دارد [۱].

Berge و همکاران در سال ۲۰۰۶ پیشنهاد کردند برای نمایش مولفه‌های گاوسین در طبقه‌بندی با تعداد کوچکتری از پارامترها، به تعدادی یا همه توزیع‌های مولفه‌ها اجازه به اشتراک گذاشتن ساختارهای ویژه^۴ داده شود [۹]. در این تحقیق یک الگوریتم داده مبنا (از پایین به بالا) برای جستجوی پارامترهای اشتراک مدل، توسعه داده شد. این روش روی یک منطقه انبوه درخت و دو منطقه شهری اجرا شد و نتایج، نشان‌دهنده‌ی عملکرد بهتر این روش نسبت به روش‌های طبقه‌بندی قدیمی است.

در تحقیقی دیگر، Reddy و همکاران در سال ۲۰۰۷ [۱۰] ضمن بررسی روش مدل آمیخته گاوسی با استفاده از الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی، به معرفی روش مدل آمیخته گاوسی تعمیم‌یافته برای تصاویری که شدت درجه خاکستری‌ها غیر گاوسی هستند، پرداختند. آنها علاوه بر الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی از الگوریتم K-Means برای بدست آوردن تعداد مناطق و تخمین‌های اولیه پارامترهای مدل استفاده کردند.

LI Bo نیز در سال ۲۰۱۰ [۱۱] الگوریتمی برای انتخاب تعداد مولفه‌های آمیخته و تخمین پارامترهای مدل آمیخته گاوسی ارائه نمود. این روش بدون نیاز به انتخاب تعداد مولفه‌ها از یک مجموعه‌ای از مدل‌های کاندید، بر

^۳ Latent variable
^۴ Eigen structure

^۱ Gaussian Mixture Model (GMM)
^۲ Finite Mixture Model

روش، هر خوشه به وسیله یک توزیع پارامتری نشان داده می‌شود. آن‌گاه مدلی که برای کل داده‌ها ارائه می‌شود ترکیب آمیخته‌ی متناهی از این توزیع‌ها خواهد بود. استفاده از مدل آمیخته‌ی گاوسی، اطلاعات کاملتری درباره‌ی خوشه‌ها را به دست می‌دهد.

به دلیل انعطاف‌پذیری مدل آمیخته‌ی گاوسی برای انواع مختلفی از توزیع‌ها، در یافتن الگوهای برای امور مالی تجربی نیز، از مدل آمیخته‌ی گاوسی استفاده می‌شود. در مدل‌سازی مالی و کاربردهای آن، توزیع نرخ سود (بازده) در دارایی‌های مالی نقش مهمی دارد. متداول‌ترین فرض این است که نرخ سود دارایی‌ها، توزیع گاوسی دارد و از آنجا که دیگر توزیع‌ها نیز می‌توانند به خوبی با یک مدل آمیخته‌ی گاوسی متناهی تقریب زده شوند، این مدل در امور مالی مورد توجه بسیاری قرار گرفته است.

همچنین مدل آمیخته‌ی گاوسی در نجوم، زیست‌شناسی، پزشکی و مهندسی نیز کاربرد بسیاری دارد که برای جزئیات بیشتر می‌توان به [۱۵]، [۱۶]، [۱۷] و [۱۸] مراجعه کرد.

در مجموع می‌توان گفت که بسیاری از مقالات مرور شده در حوزه‌ی سنجش از دور به استفاده از مدل آمیخته‌ی گاوسی و تخمین پارامترهای آن با استفاده از الگوریتم امید ریاضی - بیشینه‌سازی پرداخته‌اند. از طرف دیگر، استفاده از روش‌های کاهش ابعاد در تمامی پژوهش‌ها دیده می‌شود. این امر نشان‌دهنده لزوم استفاده از روش‌های کاهش بعد برای افزایش کارایی الگوریتم‌های طبقه‌بندی است.

یکی از معایبی که در الگوریتم امید ریاضی - بیشینه‌سازی مشاهده می‌شود اینست که در مواجهه با نقاط تکین یا عوارض بسیار کوچک دچار مشکل می‌شود و دقت پایین تری حاصل می‌شود. لذا در این مقاله با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیر گیبز، راه حلی برای این مشکل ارائه شده است. از سوی دیگر، در این مقاله سعی شده به این پرسش که چه روشی برای تخمین پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی مناسب است، پاسخ داده شود و مزایا و معایب هر یک از روش‌های تخمین پارامتر تحلیل شود.

در ادامه مقاله، پس از تشریح الگوریتم مدل آمیخته‌ی گاوسی و روش‌های تخمین پارامتر نمونه‌گیر گیبز و الگوریتم امید ریاضی - بیشینه‌سازی، داده‌های مورد استفاده

اساس بررسی خصوصیات توزیع‌های منحنی بیضوی چند متغیره، مدل صحیح را با یک روش جدید که زمان محاسبات را کمتر و حساسیت کمتری به مقادیر اولیه الگوریتم امید ریاضی - بیشینه‌سازی دارد، معرفی می‌کند. همچنین در تحقیقی که Wei Li در سال ۲۰۱۴ [۱۲] انجام داد، از مدل آمیخته گاوسی برای طبقه‌بندی تصاویر فراطیفی استفاده نمود. وی سائز زیاد پارامترهای فضای خروجی را مانعی در برابر سازگاری کامل مدل آمیخته گاوسی برای تصاویر فراطیفی دانست. به همین دلیل قبل از اجرای طبقه‌بندی، ابتدا باید یک الگوریتم کاهش بعد روی تصویر فراطیفی اعمال نمود. وی از الگوریتم‌های کاهش بعد LFDA^۱ و LPNMF^۲ استفاده کرد. سپس نتایج حاصل از طبقه‌بندی مدل آمیخته گاوسی را به منظور افزایش دقت مکانی با نتایج حاصل از MRF^۳ ترکیب کرد و به دقت قابل قبولی دست یافت.

در سال‌های اخیر برای شناسایی گوینده (تشخیص صدا)، در متون مستقل، از مدل‌های آمیخته‌ی گاوسی استفاده می‌کنند. شناسایی گوینده، هنگامی که هیچ پیش فرضی از آن‌چه گوینده به زبان می‌آورد وجود ندارد، اصطلاحاً شناسایی گوینده با متون مستقل گفته می‌شود. برای هر گوینده مدل آمیخته‌ی گاوسی به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که تابع احتمال پسین‌اش، دارای مقدار بیشینه شود. رینولد و همکارانش در سال ۱۹۹۵ در مقاله‌ی [۱۳] نشان دادند که مدل آمیخته‌ی گاوسی برای شناسایی گوینده در متون مستقل، مدلی استوار می‌باشد.

علاوه بر تشخیص گوینده، از مدل آمیخته‌ی گاوسی برای شناسایی چهره‌ی افراد نیز استفاده می‌شود [۱۴]. مهم‌ترین مشکل در تشخیص چهره افراد و بازیابی آن، سایه روشن‌ها، تغییرات نور و پس‌زمینه‌های هم‌رنگ است. تشخیص چهره در مسائل امنیتی، تشخیص تغییرات در افراد و فهرست‌گذاری در تصاویر ویدئویی، کاربرد دارد. برای مدل‌بندی رنگ چهره‌ی (پوست) افراد نیز، می‌توان از مدل آمیخته‌ی گاوسی استفاده کرد.

در روش خوشه‌بندی مبتنی بر مدل، که برای مشاهدت، مدلی احتمالاتی در نظر گرفته می‌شود، از مدل آمیخته‌ی گاوسی استفاده می‌شود. بدین صورت که در این

^۱ Local Fisher Discriminant Analysis

^۲ Locality-Preserving Nonnegative Matrix Factorization

^۳ Markov Random Field

α_k ضریب وزنی یا ضریب آمیخته‌ی k ام است که در شرایط $0 \leq \alpha_k \leq 1$ و $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ صدق می‌کند.

در مدل آمیخته گاوسی، $f(x_i; \theta)$ ، گاوسی فرض می‌شوند که پارامترهای آن میانگین و انحراف معیارهای متناظر می‌باشند. این مدل با K مؤلفه می‌تواند به صورت رابطه (۲) نوشته شود.

$$f(x_i; \mu, \sigma^2) = \sum_{k=1}^K \alpha_k \phi(x_i; \mu_k, \sigma_k^2) \quad (2)$$

در رابطه فوق $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ و $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)$ به ترتیب بردارهای میانگین و انحراف معیار توزیع‌های گاوسین هستند. تابع چگالی گاوسی با پارامترهای μ_k و σ_k^2 مربوط به مؤلفه k ام می‌باشد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\phi(x_i; \mu_k, \sigma_k^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right] \quad (3)$$

رابطه (۲) تابع چگالی احتمال متغیرهای مشاهده شده را با استفاده از چگالی‌های آمیخته گاوسی مدل می‌کند. با دادن یک سری مقادیر ورودی، می‌توان با استفاده از الگوریتم‌هایی از جمله الگوریتم نمونه‌گیر گیبز^۵ و الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی پارامترها و ضرایب آمیخته‌ی متناظر با هر توزیع را بدست آورد.

۲-۱- الگوریتم نمونه‌گیر گیبز

تعیین چگالی‌های ناشناخته در بسیاری از کاربردها نظیر مدل‌های بیزی پیچیده، تنها به کمک شبیه‌سازی ممکن بوده و در این میان روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی (MCMC)^۶ بیشترین سهم را دارند. در این روش با تولید اعداد تصادفی از توزیع پسین^۷، میانگین اعداد تولید شده را به عنوان برآورد پارامتر توزیع پسین در نظر می‌گیرند، که پشتوانه صحت و کارا بودن آن قانون ضعیف

جهت پیاده‌سازی الگوریتم معرفی و دو روش کاهش بعد آنالیز مؤلفه‌های تصادفی^۱ و نگاشت تصادفی^۲ روی آن‌ها صورت می‌گیرد. در ادامه از الگوریتم‌های پیشنهادی برای خوشه‌بندی داده‌های فراطیفی در قالب حالات مختلف استفاده شده است. در نهایت در بخش نتایج و بحث معیار ارزیابی، معرفی و نتایج حاصل از اجرای الگوریتم‌ها بررسی می‌گردد. در بخش ۶ نیز نتیجه‌گیری تحقیق ارائه می‌شود.

۲- مدل آمیخته‌ی گاوسی

مدل آمیخته‌ی گاوسی یکی از روش‌های نوینی است که به منظور طبقه‌بندی تصاویر سنجش از دور فراطیفی ارائه شده است. استفاده از این الگوریتم به دلیل نتایج رضایت بخش و سرعت نسبتاً بالا در حال افزایش است. مدل آمیخته‌ی گاوسی به میزان قابل توجهی در مدل‌سازی تراکم و خوشه‌بندی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدل‌ها دارای قابلیت تخمین کاملی می‌باشند، چرا که آنها می‌توانند هر نوع تابع چگالی احتمال را به صورت دقیقی با تعداد کافی تابع گاوسی مدل‌سازی نمایند [۱۹].

مدل آمیخته‌ی گاوسی جز سیستم‌های شناسایی الگو^۳ است. این مدل تابع چگالی احتمال متغیرهای مشاهده شده را با استفاده از یک چگالی‌های آمیخته گاوسی مدل می‌کند. مدل آمیخته‌ی گاوسی زیرمجموعه مدل‌های آمیخته‌ی متناهی است. یک مدل آمیخته متناهی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]: فرض کنید مشاهداتی از نمونه تصادفی مستقل و هم توزیع X_1, X_2, \dots, X_n با بردار پارامتر $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ باشند، آن‌گاه تابع چگالی آمیخته مشاهدات به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x_i; \theta) = \sum_{k=1}^K \alpha_k f_k(x_i; \theta_k), \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

را تابع چگالی آمیخته‌ی k مؤلفه‌ای می‌گویند. منظور از مؤلفه، همان زیر جامعه تشکیل دهنده‌ی جامعه می‌باشد که تعدادشان را با k نشان می‌دهند. θ_k پارامتر مربوط به زیر جامعه‌ی k می‌باشد و

^۴ Mixing coefficient

^۵ Gibbs sampling

^۶ Monte Carlo Markov Chain

^۷ Posterior distribution

^۱ Principal Component Analysis (PCA)

^۲ Random Projection (RP)

^۳ Pattern Recognition

گام اول: ابتدا τ_{ik} (احتمال پسین مشاهده i ام)، از توزیع چندجمله‌ای با احتمال زیر تولید می‌شود:

$$\tau_{ki} = p(z_k = 1 | x_i) = \frac{\alpha_k \phi(x_i | \mu_k, \sigma_k)}{\sum_{j=1}^K \alpha_j \phi(x_i | \mu_j, \sigma_j)} \quad (4)$$

در اینجا ذکر این نکته لازم است که α_k ، μ_k و σ_k در تکرار اول یعنی $t = 1$ همان متغیرهای تولیدشده در مرحله آغازین می‌باشد.

گام دوم: از توزیع پسین یک سری مشاهده به تصادف انتخاب می‌شوند و مقادیر α_k ، μ_k و σ_k بر اساس آن مشاهدات تولید می‌شوند. μ_k و σ_k بر اساس معکوس توزیع ویشارت تولید می‌شوند. α_k نیز از توزیع دیریکله به دست می‌آید.

جزئیات بیشتر در مورد این روش در [۲۳] آورده شده است.

۲-۲- الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی

مسئله تخمین پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. اوریت و هند در سال ۱۹۸۱ یک مرور جامع از این موضوع ارائه دادند و چندین روش برای تخمین این پارامترها پیشنهاد کردند [۲۴]. یکی از این روش‌ها الگوریتم امید ریاضی-بیشینه‌سازی (EM) است. این روش یک روش کلی برای بهینه‌سازی توابع درست‌نمایی است، هنگامی که داده‌ی گمشده وجود داشته باشد یا روش‌های ساده بهینه‌سازی با شکست مواجه شوند [۲۵] و [۲۶]. این روش در سال ۱۹۹۷ توسط دمپستر و همکارانش ارائه شد [۲۷] و در سال ۱۹۸۴ توسط رندر و واکر برای مدل‌های آمیخته به کار گرفته شد [۲۸]. برای استفاده از این الگوریتم باید تعداد مؤلفه‌های آمیخته مشخص باشد. تعداد مؤلفه‌های آمیخته نشان‌دهنده تعداد کلاس‌های طبقه‌بندی است که می‌توان آن را با دانش قبلی از مسئله، روش‌های گرافیکی آنالیز دیتا و یا سایر روش‌های تخمین کلاس از جمله Adaptive Mixture بدست آورد [۲۹]. اگرچه روش‌هایی وجود دارند که تعداد کلاس‌ها را قبل از انجام خوشه‌بندی محاسبه می‌کنند، اما در این پژوهش برای بررسی هرچه

اعداد بزرگ است. با توجه به نیاز به برآورد همزمان پارامترهای مدل آمیخته، تولید اعداد تصادفی از توزیع توأم کار ساده‌ای نیست. لذا روش‌های گوناگونی برای تسهیل تولید اعداد تصادفی از توزیع‌های توأم، ارائه شده است. روش نمونه‌گیر گیبز از جمله روش‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی است [۲۰] که بر اساس توزیع شرطی^۱ مشاهدات، زنجیر مارکوفی از آنها تولید می‌کند. این روش اولین بار توسط متروپلیس و تله در سال ۱۹۵۳ ارائه و سپس با مقاله‌ی [۲۱] که گمن در سال ۱۹۸۴ در مورد مدل‌های پردازش تصاویر ارائه داد، وارد مرحله‌ی جدیدی شد. اما الگوریتمی که امروزه به عنوان الگوریتم گیبز در مسایل آماری از آن استفاده می‌شود، در سال ۱۹۹۰ توسط گلفند و اسمیت ارائه شد [۲۲]. نمونه‌گیری گیبز را می‌توان یک ابزار شبیه‌سازی برای تولید نمونه‌های تصادفی از تابع توزیع توأم دانست. در بسیاری از مسائل آماری با مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی سروکار داریم که توزیع توأم متغیرها در عمل نامعلوم است اما مجموعه‌ای از توزیع‌های تک تک پارامترها به شرط بقیه متغیرها که به توزیع شرطی مشهور است، قابل محاسبه و موجود است. اگر مجموعه مناسبی از چگالی‌های شرطی موجود باشد می‌توان با کمک روش‌های نمونه‌گیری مانند نمونه-گیری گیبز یک نمونه مؤثر از چگالی توأم و احتمال حاشیه‌ای مورد نظر تولید کرده و بوسیله‌ی نمونه تولید شده، تابع چگالی و خصوصیات آن را با درجه اطمینان بالا محاسبه کرد [۲۳]. روش کار در الگوریتم نمونه‌گیر گیبز شامل مراحل زیر است:

مرحله آغازین: در این مرحله مقادیر اولیه برای پارامترهای بردار میانگین، ماتریس کواریانس و ضرایب اختلاط انتخاب می‌شوند. مقادیر اولیه بردار میانگین و ماتریس کواریانس را می‌توان توسط الگوریتم k-means به دست آورد و مقادیر اولیه ضرایب اختلاط برای تمامی کلاس‌ها یکسان فرض می‌شود که شروط $\sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$ و $0 \leq \alpha_k \leq 1$ را نیز برآورده کند.

مرحله تکرار: این مرحله برای هر $t = 1, 2, \dots, T$ که T تعداد تکرار الگوریتم و بسته به نظر کاربر تعریف می‌شود. مرحله‌ی تکرار در دو گام انجام می‌شود:

^۲ Expectation-Maximization

^۱ Conditional probabilities

بهتر الگوریتم‌های مورد استفاده، تعداد کلاس‌ها را معلوم در نظر می‌گیریم. علاوه بر تعداد مؤلفه‌های آمیخته، می‌بایست یک حدس اولیه برای مقادیر پارامترهای بردار میانگین، ماتریس کواریانس و ضرایب اختلاط تولید کرد. الگوریتم EM با استفاده از تخمین‌های اولیه و با در نظر گرفتن متغیرهای پنهان از چرخه مکرر برای برآورد پارامترها استفاده می‌کند. این الگوریتم با در نظر گرفتن مقدار اولیه برای پارامترهای مدل شروع می‌شود و در گام بعد که مرحله‌ی تکرار نامیده می‌شود، این پارامترها به‌نگام می‌شوند و چرخه تا جایی تکرار می‌شود که الگوریتم همگرا شود. مرحله‌ی تکرار از دو گام محاسبه امید ریاضی و بیشینه‌سازی تشکیل می‌شود. در گام اول احتمالات پسین توسط رابطه (۵) محاسبه می‌گردد.

$$\hat{\tau}_{ki} = \frac{\hat{\alpha}_k \Phi(x_i; \hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_k)}{\hat{f}(x_i)} \quad (5)$$

در رابطه بالا $\hat{\tau}_{ki}$ احتمال پسین برای پیکسل i ام است و نشان‌دهنده‌ی میزان احتمال پیکسل x_i نسبت به تابع چگالی آمیخته‌ی k ام است. $\Phi(x_i; \hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_k)$ چگالی نرمال مؤلفه‌ی k ام و $\hat{f}(x_i)$ نیز تخمین آمیخته‌ی گاوسی برای پیکسل x_i است که رابطه آن در زیر آمده است.

$$\hat{f}(x_i) = \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k \Phi(x_i; \hat{\mu}_k, \hat{\sigma}_k) \quad (6)$$

در گام بعد پارامترهایی انتخاب می‌شوند که بر اساس آن‌ها امید ریاضی بدست آمده از مرحله قبل بیشینه مقدار شود. در این مرحله پارامترهای مدل برحسب $\hat{\tau}_{ki}$ که از گام قبل بدست آمده، محاسبه می‌شود.

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\tau}_{ki} \quad (7)$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\tau}_{ki} x_i}{\hat{\alpha}_k} \quad (8)$$

$$\hat{\sigma}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\tau}_{ki} (x_i - \hat{\mu}_k)(x_i - \hat{\mu}_k)^T}{\hat{\alpha}_k} \quad (9)$$

به طور خلاصه روند اجرایی الگوریتم EM را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

- ۱- تعیین K (تعداد کلاس‌های طبقه‌بندی).
- ۲- تولید مقادیر اولیه‌ی پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی (این پارامترها شامل ضریب اختلاط، بردار میانگین و انحراف معیار برای هر مؤلفه‌ی آمیخته است).
- ۳- محاسبه امید ریاضی (در این مرحله احتمال هر مشاهده نسبت به تابع چگالی آمیخته از طریق رابطه (۵) محاسبه می‌شود).
- ۴- بیشینه‌سازی (در این مرحله پارامترهای مدل برحسب $\hat{\tau}_{ki}$ که از گام سوم بدست آمده، به‌نگام می‌شوند).
- ۵- تکرار گام ۳ و ۴ تا رسیدن به همگرایی در برآورد پارامترهای مدل.

۳- روش پیشنهادی

از آنجایی که هدف این تحقیق طبقه‌بندی داده‌های فراطیفی با استفاده از مدل آمیخته‌ی گاوسی است، در ابتدا باید روش تخمین پارامترهای مدل آمیخته مشخص شود. همانطور که گفته شد به منظور برآورد پارامترهای مدل آمیخته‌ی گاوسی از الگوریتم EM و نمونه‌گیر گیزر استفاده شد. روش پیشنهادی در دو مرحله انجام شد. در گام اول، الگوریتم‌های پیشنهادی بر روی داده‌های فراطیفی اجرا شدند. در گام دوم جهت بررسی تأثیر کاهش ابعاد تصاویر فراطیفی روی دقت الگوریتم‌ها، دو روش کاهش بعد آنالیز مؤلفه‌های اصلی و نگاشت تصادفی (RP) قبل از انجام خوشه‌بندی، پیاده‌سازی شدند. پیاده‌سازی الگوریتم‌ها در نرم‌افزار متلب و تعداد تکرار برای الگوریتم EM، ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است.

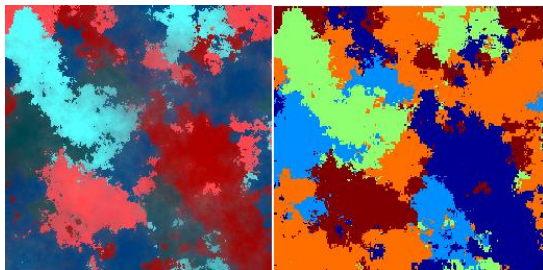
۴- داده‌های مورد استفاده

جهت ارزیابی دقت الگوریتم‌های پیشنهادی در این تحقیق، ابتدا از یک داده شبیه‌سازی شده استفاده شد. همچنین دو داده فراطیفی واقعی Salinas و Pavia University از دو سنجنده مختلف مورد استفاده قرار گرفت تا کارایی الگوریتم‌های پیشنهادی در این تحقیق را نشان دهند.

۴-۱- داده‌ی شبیه‌سازی

داده‌های شبیه‌سازی شده از عناصر خالص با مشخصه طیفی و نقشه‌های فراوانی معلوم ساخته شدند. بنابراین از

همچنین ترکیب رنگی داده مورد استفاده و نقشه واقعیت زمینی آن در شکل ۳ نمایش داده شده است. این داده شامل یک مکعب داده با ابعاد 256×256 در 224 باند طیفی است.

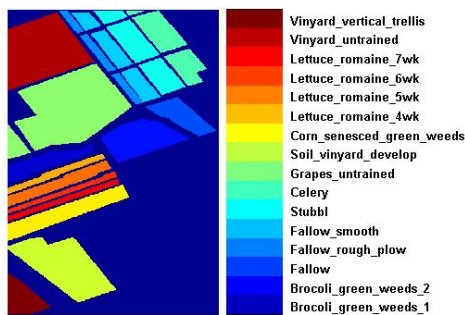


شکل ۳- الف) نقشه واقعیت زمینی ب) نقشه رنگی کاذب داده شبیه سازی

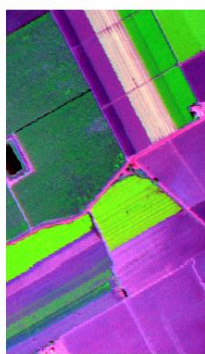
۲-۴- داده واقعی

۱-۲-۴- داده Salinas

این داده توسط سنجنده AVIRIS از دره Salinas، کالیفرنیا ای آمریکا اخذ شده و دارای ۱۶ کلاس طیفی مختلف است. توان تفکیک مکانی این تصویر ۳٫۵ متر و ابعاد تصویر ۵۱۲ سطر در ۲۱۷ ستون است. بعد از انجام پیش پردازش، ۲۰ باند جذب آب از این تصویر حذف شدند و ۲۰۴ باند در تصویر نهایی انتخاب شدند. ترکیب رنگی کاذب از تصویر مورد مطالعه و همچنین نقشه واقعیت زمینی در شکل ۴ آورده شده است.



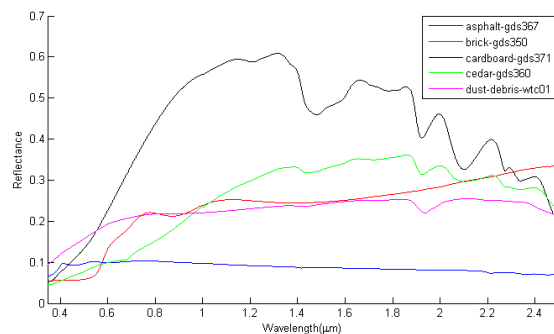
الف



ب

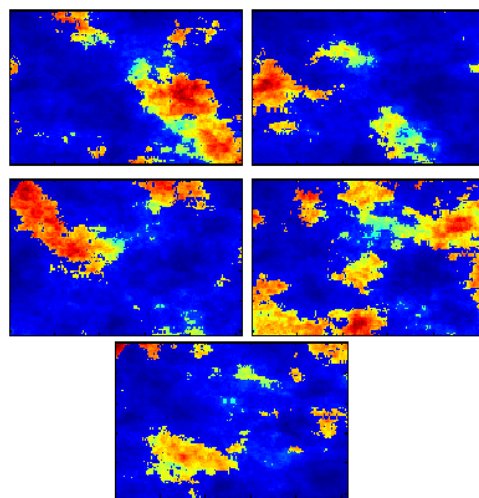
شکل ۴- الف) نقشه واقعیت زمینی ب) نقشه رنگی کاذب داده Salinas

این داده‌ها می‌توان به عنوان ابزاری برای ارزیابی نتایج الگوریتم‌ها استفاده نمود. داده‌ی شبیه‌سازی شده‌ی مورد استفاده در این پژوهش از ۵ کلاس طیفی با مشخصه‌های طیفی معلوم تشکیل شده است. امضای طیفی این عناصر که از کتابخانه طیفی سازمان زمین‌شناسی ایالات متحده انتخاب شده‌اند (شکل ۱).



شکل ۱- مشخصه طیفی ۵ عنصر خالص

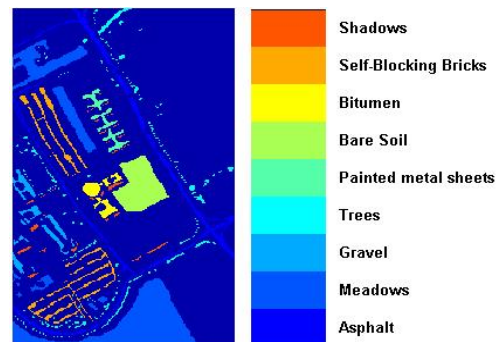
سپس با اعمال وزن‌های مختلف برای عنصر خالص شکل ۱، پیکسل‌های مختلط ایجاد شدند. وزن‌های اعمال شده برای هر عنصر خالص در هر پیکسل، نقشه فراوانی عنصر مربوط است. نقشه‌های فراوانی توسط جعبه ابزار شبیه‌سازی که تحت عنوان پروژه HYDRA انجام شده است، تولید شده‌اند. این جعبه ابزار که قابل دسترس در [۳۰] است، تمامی ویژگی‌های فراوانی عناصر خالص، اعم از نامنفی بودن فراوانی‌ها و نیز برابر یک بودن مجموع فراوانی‌ها در هر پیکسل را داراست. در شکل ۲ نقشه‌های فراوانی پنج عنصر به کار گرفته شده برای تولید داده شبیه‌سازی شده آورده شده است.



شکل ۲- نقشه‌های فراوانی پنج عنصر خالص

۴-۲-۲- داده Pavia University

داده‌ی واقعی دیگر مورد مطالعه، توسط سنجنده ROSIS از منطقه Pavia University در کشور ایتالیا، اخذ شده است. قدرت تفکیک طیفی این سنجنده متغیر از ۰,۴۳ تا ۰,۸۶ میکرومتر و توان تفکیک مکانی آن ۱,۳ متر است. این داده از لحاظ اتمسفری تصحیح شده و پس از حذف باندهای نویزی ۱۰۳ باند طیفی دارد. ابعاد تصویر ۶۱۰ سطر در ۳۴۰ ستون و شامل ۹ کلاس طیفی مختلف است.



الف



ب

شکل ۵- الف) نقشه واقعیت زمینی ب) نقشه رنگی کاذب Pavia University

مختلفی را برای ارزیابی طبقه‌بندی ارائه کند، در این پژوهش از مولفه‌های ضریب کاپا و دقت کلی که به ترتیب در رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) آورده شده‌اند به عنوان پرکاربردترین معیارهای ارزیابی، مورد استفاده قرار گرفتند.

$$K_{hat} = \frac{N \sum_{i=1}^r x_{ii} - \sum_{i=1}^r (x_{i+} \times x_{+i})}{N^2 - \sum_{i=1}^r (x_{i+} \times x_{+i})} \quad (10)$$

$$OA = \frac{\sum_{i=1}^r x_{ii}}{N} \quad (11)$$

یکی دیگر از معیارهای ارزیابی الگوریتم‌ها، زمان انجام محاسبات است. در جدول ۱ میزان دقت کلی، ضریب کاپا و زمان محاسبات مربوط به الگوریتم‌های پیشنهادی، برای سه داده فراتر از آورده شده است.

جدول ۱- مقادیر پارامترهای دقت کلی، ضریب کاپا و زمان پردازش الگوریتم‌های صورت گرفته بر روی سه داده فراتر از

الگوریتم اجرا شده	داده تصویری	Overall Accuracy	Kappa Coefficient	زمان پردازش (s)
GMM-Gibbs	شبیه سازی	۱۰۰,۰۰	۱,۰۰	۱۳۲۰
	Pavia	۷۸,۰۰	۰,۷۲	۱۵۶۰
	Salinas	۹۳,۱۶	۰,۹۲	۱۷۸۱
GMM-EM	شبیه سازی	۹۶,۷۳	۰,۹۵	۷۵۱
	Pavia	۶۴,۱۰	۰,۵۷	۹۹۷
	Salinas	۸۲,۵۴	۰,۸۰	۱۱۳۰

همانطوری که از جدول ۱ مشخص است، الگوریتم نمونه‌گیر گیبز زمان پردازش بیشتری را برای انجام پردازش‌ها به خود اختصاص می‌دهد. اما استفاده از این روش می‌تواند باعث افزایش دقت طبقه‌بندی گردد که این افزایش برای تصویر شبیه‌سازی حدود ۳ درصد، برای تصویر Pavia حدود ۱۲ درصد و برای تصویر Salinas حدود ۱۰ درصد دقت کلی است. از طرف دیگر، میزان افزایش دقت در تصویر فراتر از Pavia که دارای عوارض کوچک است ۲ درصد از تصویر Salinas بیشتر می‌باشد که نشان از عملکرد بهتر الگوریتم نمونه‌گیر گیبز در برخورد با عوارض کوچک دارد. در شکل ۶ تصاویر طبقه‌بندی شده با هر یک از دو الگوریتم نشان داده شده است.

۵- نتایج و بحث

۵-۱- طبقه‌بندی بدون استفاده از روش کاهش بعد

همانگونه که در بخش ۳ توضیح داده شد، الگوریتم‌های پیشنهادی در دو مرحله بر روی داده‌های مورد نظر پیاده‌سازی می‌شوند. در مرحله اول به منظور حذف اثر روش کاهش بعد روی نتایج، الگوریتم‌ها روی کل باندهای داده‌های فراتر از اعمال شدند. برای ارزیابی نتایج روش‌های پیشنهادی، به منظور برآورد صحت و دقت روش طبقه‌بندی از ماتریس خطا به کمک داده‌های واقعیت زمینی استفاده شد. اگرچه استفاده از ماتریس خطا می‌تواند معیارهای

جدول ۲- مقادیر پارامترهای دقت کلی، ضریب کاپا و زمان پردازش الگوریتم‌های صورت گرفته بر روی سه داده فرایطیفی کاهش بعد یافته با استفاده از PCA

الگوریتم اجرا شده	داده تصویری	Overall Accuracy	Kappa Coefficient	زمان پردازش (s)
GMM-Gibbs-PCA	شبهه سازی	۱۰۰,۰۰	۱,۰۰	۷۴
	Pavia	۸۵,۳۴	۰,۸۱	۶۳۴
	Salinas	۹۴,۵۱	۰,۹۴	۶۷۷
GMM-EM-PCA	شبهه سازی	۱۰۰,۰۰	۱,۰۰	۱۵
	Pavia	۸۳,۱۰	۰,۷۸	۲۲۲
	Salinas	۹۳,۵۷	۰,۹۳	۲۷۰

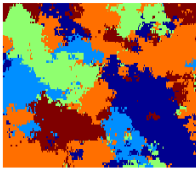
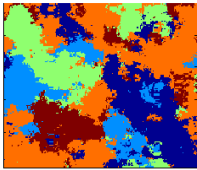
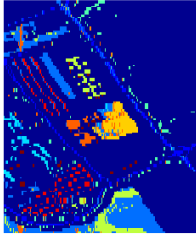
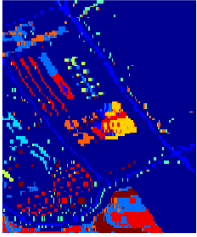
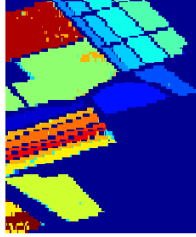
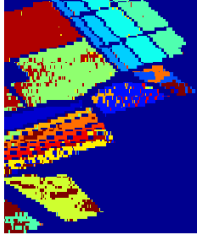
همانگونه که انتظار می‌رفت زمان انجام محاسبات در این حالت نسبت به زمانی که داده‌ها کاهش بعد نیافته بودند، بسیار کمتر و دقت‌های بدست آمده بیشتر است. از طرف دیگر همانند مرحله اول اجرای الگوریتم نمونه‌گیر گیبز نسبت به الگوریتم EM زمان بیشتری برده است. اما همانطور که مشاهده می‌شود به جز تصویر شبهه‌سازی که برای هر دو الگوریتم میزان دقت ۱۰۰ درصد گزارش شده است، در دو تصویر دیگر استفاده از الگوریتم گیبز برای طبقه‌بندی مدل آمیخته گاوسی، دقت بالاتری را به همراه داشته است. میزان افزایش دقت برای تصویر Pavia حدود ۲ درصد و برای تصویر Salinas حدود یک درصد دقت کلی است. نقشه‌های طبقه‌بندی خروجی در این حالت، در شکل ۷ نمایش داده شده‌اند.

۵-۲-۲- کاهش بعد با استفاده از روش RP

RP یک روش کاهش بعد خطی است که فضای d بعدی را به فضای k بعدی ($k \ll d$)، با استفاده از ماتریس $R_{k \times d}$ که دارای ستون‌های با اندازه واحد است، نگاشت می‌کند.

$$X_{k \times N}^{RP} = R_{k \times d} X_{d \times N} \quad (12)$$

در معادله (۱۲)، $X_{d \times N}$ مقادیر پیکسل‌ها، N تعداد کل پیکسل‌ها، d بعد فضای اولیه و k فضای کاهش بعد یافته است. عناصر ماتریس تصادفی R نیز از توزیع گاوسین پیروی می‌کنند. در تحقیقی Achlioptas [۳۱] نشان داده است که توزیع گاوسین مورد بحث می‌تواند با یک توزیع ساده‌تر که در معادله (۱۳) آمده است، جایگزین گردد.

داده تصویری	GMM-Gibbs	GMM-EM
شبهه‌سازی		
Pavia		
Salinas		

شکل ۶- نقشه‌های طبقه‌بندی حاصل از الگوریتم‌های صورت گرفته بر روی سه داده فرایطیفی

۵-۲-۵- طبقه‌بندی به همراه استفاده از روش کاهش بعد

به منظور بررسی تأثیر کاهش ابعاد تصویر فرایطیفی بر روی دقت طبقه‌بندی، ابتدا ابعاد تصویر فرایطیفی کاهش یافته و سپس طبقه‌بندی با استفاده از مدل آمیخته گاوسی و الگوریتم‌های تخمین پارامتر مورد نظر اعمال می‌گردد.

۵-۲-۱- کاهش بعد با استفاده از روش PCA

اولین روش کاهش بعد مورد استفاده، روش PCA است. این روش جزء روش‌های استخراج ویژگی خطی است. در این روش معیار انتخاب تعداد بهینه مولفه‌های اصلی را مقدار اطلاعات بدست آمده در نظر می‌گیریم. که تعداد مولفه‌ها برای تصاویر شبهه‌سازی، Pavia و Salinas به ترتیب برابر ۴، ۸ و ۷ مؤلفه می‌باشد. در جدول ۲ میزان پارامترهای دقت مربوط به اجرای الگوریتم‌های پیشنهادی، برای سه داده مورد استفاده آورده شده است.

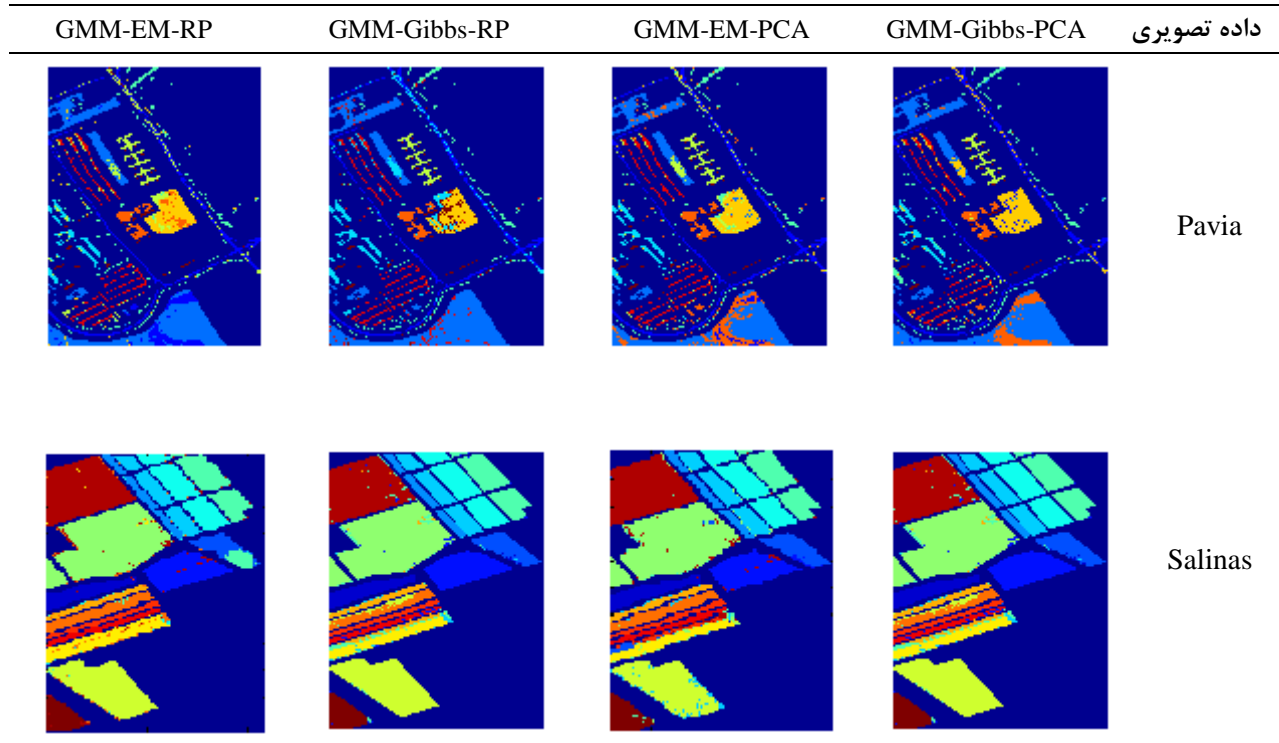
جدول ۳- مقادیر پارامترهای دقت کلی، ضریب کاپا و زمان پردازش الگوریتم‌های صورت گرفته بر روی سه داده فرایطی کاهش بعد یافته با استفاده از RP

الگوریتم اجرا شده	داده تصویری	Overall Accuracy	Kappa Coefficient	زمان پردازش (s)
GMM-Gibbs-RP	شبه سازی	۱۰۰،۰۰	۱،۰۰	۱۵۳
	Pavia	۸۸،۸۰	۰،۸۴	۹۹۱
	Salinas	۹۶،۹۱	۰،۹۶	۱۲۳۵
GMM-EM-RP	شبه سازی	۱۰۰،۰۰	۱،۰۰	۲۳
	Pavia	۸۴،۲۱	۰،۸۰	۲۳۰
	Salinas	۹۵،۰۰	۰،۹۴	۵۶۰

نکته‌ی مهم دیگر افزایش دقت طبقه‌بندی در صورت استفاده از روش کاهش بعد RP است. همانطور که از جداول ۲ و ۳ مشخص است، کاهش بعد داده‌ها با استفاده از روش RP نسبت به PCA سبب افزایش حدود ۲ درصدی دقت کلی در تصویر Salinas و افزایش حدود ۳ درصدی دقت کلی در تصویر Pavia شده است. نقشه‌های طبقه‌بندی در این حالت نیز در شکل ۷ آورده شده است.

$$r_{ij} = \sqrt{3} \cdot \begin{cases} +1 & \text{With probability } \frac{1}{6} \\ 0 & \text{With probability } \frac{2}{3} \\ -1 & \text{With probability } \frac{1}{6} \end{cases} \quad (13)$$

ایده اصلی روش RP از لِم Johnson-Lindenstrauss گرفته شده است [۳۲]. اگر نقاط در یک فضای برداری به یک زیرفضای تصادفی با بعد مناسب تصویر گردد، آنگاه فاصله بین نقاط در فضای جدید حفظ می‌شود. در [۳۳] و [۳۴] اثباتی ساده از لِم Johnson-Lindenstrauss آورده شده است. جدول ۳ مقادیر پارامترهای دقت در این حالت را نشان می‌دهد. همانند بخش قبل، استفاده از الگوریتم گیبز دقت بالاتری را نسبت به الگوریتم EM ارائه می‌دهد. که میزان افزایش دقت برای تصویر Pavia حدود ۲/۵ درصد و برای تصویر Salinas حدود ۲ درصد دقت کلی است.



شکل ۷- نقشه‌های طبقه‌بندی حاصل از الگوریتم‌های صورت گرفته بر روی داده‌های فرایطی کاهش بعد یافته Pavia و Salinas

۶- نتیجه‌گیری

تصادفی از یک تابع چگالی حاشیه‌ای است، بدون آنکه نیازی به خود تابع باشد. روش پیشنهادی ابتدا بر روی تمام باندهای سه تصویر مورد استفاده و سپس روی تصاویر کاهش بعد یافته اعمال گردید و در نهایت با الگوریتم EM مقایسه گردید. همانطور که انتظار داشتیم

در این تحقیق الگوریتم نمونه‌گیر گیبز جهت تخمین پارامترهای طبقه‌بندی‌کننده مدل آمیخته گاوسی به کار گرفته شد. نمونه‌گیر گیبز در واقع راهی برای تولید نمونه

نسبت به الگوریتم EM بیشتر از مناطق کشاورزی است. این امر بیانگر رفع مشکل برخورد با نقاط تکین یا عوارض کوچک در الگوریتم EM، توسط الگوریتم نمونه‌گیر گیبز است. در کل برآورد پارامترهای طبقه‌بندی کننده مدل آمیخته گاوسی با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیر گیبز پاسخ قابل قبول‌تری در مقایسه با روش EM ارائه داده است.

کاهش بعد داده‌های فراطیفی سبب بهبود دقت طبقه‌بندی شده و در این بین روش کاهش بعد RP بهتر از PCA عمل کرده است. از طرف دیگر، نمونه‌گیر گیبز از EM پاسخ بهتری به ما می‌دهد. اما زمان محاسباتی روش گیبز از EM بیشتر است. نکته دیگر اینست که در مناطق شهری میزان افزایش دقت در الگوریتم نمونه‌گیر گیبز

مراجع

- [1] Martinez, Wendy L., and Angel R. Martinez. Computational statistics handbook with MATLAB. Vol. 22. CRC press, 2007.
- [2] Roberts, D. A., Gardner, M., Church, R., Ustin, S., Scheer, G., & Green, R. O. (1998). Mapping chaparral in the Santa Monica Mountains using multiple endmember spectral mixture models. *Remote Sensing of Environment*, 65(3), 267-279.
- [3] Melnykov, V. and Maitra, R. (2010). Finite mixture models and model-based clustering. *Statistics Surveys*, 4, 80–116.
- [4] Greenspan, H., Goldberger, J. and Eshe, I. (2001). Mixture model for face-color modeling and segmentation. *Pattern Recognition Letters*, 22, 1525-1536.
- [5] Titterton, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E. (1985). *Statistical Analysis of Finite of Mixture Distributions*. Willey, New York.
- [6] Pearson, K. (1894). Contributions to the mathematical theory of evolution source, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 185, 71-110.
- [7] Melnykov, V. and Maitra, R. (2010). Finite mixture models and model-based clustering. *Statistics Surveys*, 4, 80–116.
- [8] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society*, 39, 1-38.
- [9] A. Berge and A. H. S. Solberg, "Structured Gaussian components for hyperspectral image classification," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, vol. 44, no. 11, pp. 3386–3396, Nov. 2006
- [10] Reddy, PVGD Prasad, K. Srinivas Rao, and S. Yarramalle. "Unsupervised Image Segmentation Method based on Finite Generalized Gaussian Distribution with EM and K-Means Algorithm." *Proceedings of International Journal of Computer Science and Network Security 7.4 (2007): 317-321*.
- [11] Li, Bo, W. J. Liu, and L. H. Dou. "Unsupervised learning of Gaussian mixture model with application to image segmentation." *Chinese Journal of Electronics* 19.3 (2010): 451-456.
- [12] Li, Wei, Santasriya Prasad, and James E. Fowler. "Hyperspectral image classification using Gaussian mixture models and Markov random fields." *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE* 11.1 (2014): 153-157.
- [13] Reynolds, D.A. and Rose, R.C. (1995), Robust text-independent speaker identification using Gaussian mixture speaker models, *IEEE Transaction on Speech Audio Process*, 3 72–83.
- [14] Reynolds, D.A., Quatieri, T.F. and Dunn R.B. (2000). Speaker verification using adapted Gaussian mixture models. *Digital Signal Processing*, 10, 19–41.
- [15] Greenspan, H., Goldberger, J. and Eshe, I. (2001). Mixture model for face-color modeling and segmentation. *Pattern Recognition Letters*, 22, 1525-1536.
- [16] Titterton, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E. (1985). *Statistical Analysis of Finite of Mixture Distributions*. Willey, New York.
- [17] McKenna, S., Gong, S. and Raja, Y. (1998). Modelling facial color and identity with Gaussian mixtures. *Pattern Recognition*, 31, 1883-1892.
- [18] Kon, S. (1984). Models of stock returns a comparison. *The Journal of Finance*, 39, 147-165.
- [19] Zivkovic, Zoran. "Improved adaptive Gaussian mixture model for background subtraction." *Pattern Recognition*, 2004. ICPR 2004. Proceedings of the 17th International Conference on. Vol. 2. IEEE, 2004.
- [20] W.R. Gilks, S. Richardson, D.J. Spiegelhalter; *Markov Chain Monte Carlo in Practice*.

- [21] Geman, s., and Geman, D. (1984), "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of images," IEEE Transactions on pattern Analysis and Machine Intelligence, 6,721-741.
- [22] Gelfand, A. E., Smith, A.F.M. (1990), "Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities," Journal of the American Statistical Association, 85, 398-409.
- [23] G. Casella, E. George; Explaining the Gibbs Sampler.
- [24] Everitt, B. S. and D. J. Hand. 1981. Finite Mixture Distributions, London: Chapman and Hall.
- [25] M. Figueiredo and A. Jain, "Unsupervised learning of finite mixture models," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 24, no. 3, pp. 381–396, Mar. 2002
- [26] B. A. S. Hasan, and Q. J. Gan, "Sequential EM for unsupervised adaptive Gaussian mixture model based classifier," in Proc. 6th Int. Conf. Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition, Leipzig, Germany, 2009, pp. 96-106.
- [27] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. 1977. "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm (with discussion)," Journal of the Royal Statistical Society: B, 39: pp. 1-38.
- [28] Redner, A. R. and H. F. Walker. 1984. "Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm," SIAM Review, 26: pp. 195-239.
- [29] Preibe, C. E. 1994. "Adaptive mixture density estimation," Journal of the American Statistical Association, 89: pp. 796-806.
- [30] http://www.ehu.es/ccwintco/index.php/Hyperspectral_Imagery_Synthesis_tools_for_MATLAB
- [31] D. Achlioptas. Database-friendly random projections. In Proc. ACM Symp. On the Principles of Database Systems, pages 274–281, 2001.
- [32] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. Extensions of Lipshitz mapping into Hilbert space. In Conference in modern analysis and probability, volume 26 of Contemporary Mathematics, pages 189–206. Amer. Math. Soc., 1984.
- [33] P. Frankl and H. Maehara. The Johnson-Lindenstrauss lemma and the sphericity of some graphs. Journal of Combinatorial Theory, Ser. B, 44:355–362, 1988.
- [34] S. Dasgupta and A. Gupta. An elementary proof of the Johnson-Lindenstrauss lemma. Technical Report TR-99-006, International Computer Science Institute, Berkeley, California, USA, 1999