

آنالیز دقت و سرعت روش‌های عددی و شبه-تحلیلی در انتشارگرهای مدار ماهواره‌های ارتفاع پایین

محمد رضا سیف^{۱*}، محمد علی شریفی^۲

^۱ دانشجوی دکتری ژئودزی - گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
m.r.seif@ut.ac.ir

^۲ استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری - پردیس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران
sharifi@ut.ac.ir

(تاریخ دریافت مرداد ۱۳۹۱، تاریخ تصویب خرداد ۱۳۹۳)

چکیده

روش‌های گوناگونی برای تعیین مدار ماهواره‌ها ارائه شده است که انتگرال‌گیری عددی یکی از روش‌های متداول در این زمینه است. با وجود روش‌های بسیار متنوع در حل عددی معادلات دیفرانسیل، یکی از چالش‌های پیش روی محققین در تعیین مدار ماهواره‌ها چگونگی انتخاب یک روش انتگرال‌گیری عددی مناسب است. در این مقاله نتایج روش رونگ-کوتا بعنوان متداولترین روش تک پله‌ای و روش پیش‌بینی-برآورد-تصحیح-برآورد بعنوان متداولترین روش چند پله‌ای با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نتایج نشان داد چنانچه از روش‌های انتگرال‌گیری با خطای کنترل شده استفاده شود با انتخاب مناسب تلورانس خطا اختلاف چندانی میان روش‌های چند پله‌ای و تک پله‌ای نیست و با توجه به سرعت مناسب‌تر روش‌های چند پله‌ای بهتر است از این روش‌ها در حل معادلات حرکت ماهواره استفاده شود. در این مقاله روش لاگرانژ نیز بعنوان یک روش شبه-تحلیلی در تعیین مدار ماهواره‌ها معرفی می‌شود. برای استفاده از این روش کلاسیک در تعیین مدار ماهواره‌های ارتفاع پایین، ضرایب لاگرانژ از میدان کپلری به همه ضرایب میدان جاذبه زمین گسترش می‌دهیم و برای تست دقت این ضرایب مدار حاصل از ضرایب لاگرانژ را با مدار حاصل از انتگرال‌گیری عددی مقایسه می‌کنیم. در بخش نتایج نشان داده خواهد شد که دقت نهایی روش لاگرانژ برای یک ماهواره ارتفاع پایین بعد از یک روز در حد میلیمتر است.

واژگان کلیدی: ماهواره‌های ارتفاع پایین، ضرایب لاگرانژ، انتگرال‌گیری عددی، روش انتگرال‌گیری تک پله‌ای و چند پله‌ای

* نویسنده رابط

۱- مقدمه

یکی از روش‌های بسیار متداول در تعیین مدار ماهواره حل معادله دیفرانسیل حرکت به کمک انتگرال-گیری از مجموع شتاب‌های وارد بر ماهواره است [۱].

$$\ddot{\underline{r}} = \nabla V + \underline{a} \quad \underline{r}(t_0) = \underline{r}_0, \quad \dot{\underline{r}}(t_0) = \dot{\underline{r}}_0 \quad (1)$$

معادله (۱) را معادله بنیادین در تعیین مدار ماهواره می‌نامند که در آن V پتانسیل گرانشی نیروهای جاذبی موثر بر ماهواره و \underline{a} نشاندهنده شتاب‌های غیرجاذبی وارد بر ماهواره است. شتاب‌های وارد بر ماهواره به دو دسته کلی شتاب‌های جاذبی و غیرجاذبی تقسیم بندی می‌شوند که مهمترین شتاب‌های جاذبی ناشی از اثر جاذبه زمین، جزرومد، جاذبه جسم سوم (ماه و خورشید) و مهمترین شتاب‌های غیرجاذبی فشار تشعشعات خورشیدی و کشش اتمسفری هستند [۲]. این شتاب‌ها در تعیین مدار با استفاده از مدل‌های دینامیکی موجود محاسبه می‌گردند. محاسبه مدار ماهواره با استفاده از مدل‌های نیروی وارده بر ماهواره یکی از روش‌های قدیمی و پرکاربرد در مبحث تعیین مدار است که بعدها با مطرح شدن انواع دیگری از مدارها، این مدار به مدار دینامیکی معروف شد.

روش‌های گوناگونی برای حل معادله حرکت ماهواره ارائه شده است که متداول‌ترین آنها روش‌های انتگرال‌گیری عددی هستند. روش‌های انتگرال‌گیری عددی بسیار متنوع و متداولی برای حل معادله دیفرانسیل حرکت ماهواره ارائه شده است که می‌توان این روش‌ها را به دو دسته عمده روش‌های تک پله‌ای^۱ و چند پله‌ای^۲ تقسیم بندی کرد [۳]. یکی از متداول‌ترین روش‌های انتگرال‌گیری تک پله‌ای روش رونگ-کوتا است که در اواخر قرن نوزدهم توسط کارل رونگ و ویلهلم کوتا ارائه شد [۴]. متداول‌ترین روش چند پله‌ای نیز روش پیش‌بینی-برآورد-تصحیح (PECE)^۳ است که از ترکیب روش آدامز-مولتون با روش آدامز-بشفورث نتیجه می‌شود [۵].

یکی دیگر از روش‌های تعیین مدار ماهواره‌ها، استفاده از روش لاگرانژ است. روش لاگرانژ در حقیقت یک روش شبه-تحلیلی است که در آن بردار موقعیت ماهواره بر حسب زمان

به سری تیلور بسط داده می‌شود. با افزایش تعداد جملات سری می‌توان به اندازه دلخواه به جواب تحلیلی نزدیک شد. مزیت عمده روش لاگرانژ این است که در این روش برخلاف روش‌های عددی می‌تواند جواب پیوسته‌ای را برای موقعیت ماهواره بین لحظه اولیه و لحظه دلخواه ارائه داد [۶]. روش لاگرانژ مانند روش‌های انتگرال‌گیری چند پله‌ای در هر مرحله تنها به یکبار محاسبه مشتق نیاز دارد و از این جهت سرعت این روش مانند روش‌های چند پله‌ای و سریعتر از روش‌های تک پله‌ای است. اما برخلاف روش‌های چند پله‌ای-ای نیازی به ذخیره‌سازی مقدار مشتق تابع در لحظات پیشین و استفاده از روش‌های درونیایی و برونیایی برای محاسبه مقدار تابع در لحظه بعدی نیست. اما عیب این روش محدود بودن این ضرایب به میدان کپلری و حداکثر میدان J_2 است که کاربرد آن را به تعیین مدار سیارات منحصر می‌کند. ضرایب لاگرانژ تا درجه بالا در میدان مرکزی توسط اسکونزو و همکارانش در سال ۱۹۶۵ تعیین شد [۷]. بعدها این ضرایب در سال ۲۰۰۳ توسط لین و وانگ و به میدان J_2 توسعه پیدا کردند [۸]. در این تحقیق به دنبال آن هستیم که با بسط ضرایب لاگرانژ به میدان کامل بعنوان یک دست آورد جدید، زمینه استفاده از این روش در تعیین مدار ماهواره‌های ارتفاع پایین فراهم گردد.

در بخش اول مقاله به معرفی اجمالی روش‌های انتگرال-گیری عددی رونگ-کوتا بعنوان متداولترین روش تک‌پله‌ای و روش پیش‌بینی-برآورد-تصحیح-برآورد بعنوان متداولترین روش چند پله‌ای می‌پردازیم. در بخش دوم روش لاگرانژ معرفی و نحوه گسترش این ضرایب به میدان کامل جاذبه زمین^۴ شرح داده می‌شود. در بخش پایانی نیز مدار به دست آمده از انتگرال‌گیری‌های عددی با مدار به دست آمده از روش لاگرانژ مقایسه و نشان داده خواهد شد که این روش می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های انتگرال‌گیری عددی باشد.

۲- روش‌های انتگرال‌گیری عددی در تعیین مدار ماهواره

مجموع شتاب‌های وارد بر ماهواره، در حقیقت مشتق اول بردار سرعت و مشتق دوم بردار موقعیت است. در نتیجه

^۱ Single-step

^۲ Multi-step

^۳ Prediction-Estimation-Correction-Estimation

^۴ Full gravitational field

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad (5)$$

دقت روش رونگ- کوتا مرتبه چهار معادل با ترم چهارم سری تیلور است. البته همواره تعداد مرتبه این روش دقیقاً معادل با ترم‌های سری تیلور نیست. باتوجه در سال ۱۹۸۵ نشان داد که دقت روش رونگ- کوتا مرتبه ۶ معادل ترم پنجم، مرتبه ۸ معادل ترم ششم و مرتبه ۱۱ معادل ترم هفتم سری تیلور است [۹]. بنابراین می‌توان روش رونگ- کوتا مرتبه چهارم را از این لحاظ نسبت به روش‌های رونگ- کوتا مرتبه بالاتر برتر دانست و برای افزایش دقت انتگرال‌گیری به جای بالا بردن مرتبه روش رونگ- کوتا بازه زمانی انتگرال‌گیری را کوچک کرد.

۲-۲- روش‌های چند پله‌ای

برخلاف روش تک‌پله‌ای در روش چند پله‌ای از اطلاعات موجود در چند نقطه گذشته به جای نقاط میانی استفاده می‌کنیم که با این کار سرعت انتگرال‌گیری نسبت به روش تک‌پله‌ای به طرز قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. زیرا در هر مرحله تنها در یک نقطه محاسبه مشتق انجام می‌شود. به دلیل بکارگیری بیش از یک نقطه برای برآورد مقدار تابع در لحظه بعدی به این روش، چند پله‌ای می‌گویند. یکی از روش‌های متداول انتگرال‌گیری چند پله‌ای روش آدامز- بشفوراست که روابط آن بصورت خلاصه ارائه می‌گردد [۱۰ و ۱۱]:

$$y_{n+1} = y_n + \varphi_{ABm} h \quad (6)$$

m در این رابطه نشان‌دهنده روش آدامز-بشفور مرتبه m است که از m نقطه گرهی برای محاسبه انتگرال استفاده می‌کند. در معادله (۶)، φ_{ABm} بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varphi_{ABm} = \sum_{j=1}^m \beta_{mj} f_{n-m+j} \quad (7)$$

در روش AB_m برای گذر از مرحله i به $i+1$ مقدار تابع در نقطه $i+1$ محاسبه نمی‌شود. بنابراین برآورد y_{i+1} در حالت برونیایی کامل صورت می‌گیرد و شبیه تمامی روش‌های برونیایی این روش نیز می‌تواند دارای خطاهای قابل توجهی باشد.

برای حل این مشکل باید در برآورد y_{i+1} ، مشتق خود نقطه $i+1$ را نیز دخیل کنیم. بنابراین به جای برآزش

بردار موقعیت و سرعت (یا همان بردار وضعیت) با انتگرال-گیری از مجموع این شتاب‌ها قابل محاسبه‌اند که این فرآیند همان تعیین مدار ماهواره به کمک روش انتگرال‌گیری است. امروزه انتگرال‌گیری مدار عمدتاً به کمک روش‌های عددی حل می‌شود. روش‌های انتگرال‌گیری عددی به دو دسته کلی روش‌های تک پله‌ای و چند پله‌ای تقسیم‌بندی می‌گردند.

۲-۱- روش‌های تک پله‌ای

به روش‌های انتگرال‌گیری عددی که در آن‌ها تنها از اطلاعات موجود در نقطه ماقبل برای تعیین مقدار تابع در لحظه بعدی استفاده می‌شود روش‌های تک‌پله‌ای می‌گویند، زیرا تنها وابسته به یک نقطه‌اند. البته برای دقیق‌تر شدن جواب‌های حاصل، ممکن است به محاسبات اضافه‌تری نیز احتیاج داشته باشیم بعنوان مثال مابین نقطه t_0 و t_1 اطلاعاتی از مشتقات تابع داشته باشیم. یکی از متداول‌ترین روش‌های انتگرال‌گیری تک پله‌ای روش رونگ- کوتا است.

۲-۱-۱- روش رونگ- کوتا

روش رونگ- کوتا در اواخر قرن نوزدهم توسط کارل رونگ و ویلهلم کوتا ارائه شد [۴]. در این روش به جای در نظر گرفتن مقدار مشتق تابع مورد نظر در لحظه t_0 به عنوان شیب خط تقریب زنده تابع مذکور، میانگین وزنداری از مشتقات تابع در نقاط بازه $[t_0, t_0 + h]$ را به عنوان شیب این خط در نظر می‌گیرند. بعنوان مثال در روش رونگ- کوتا مرتبه ۵ این شیب میانگین از معادله (۲) محاسبه می‌گردد. [۵]

$$\Phi_{RK} = \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (2)$$

که در آن

$$k_1 = f(t_i + c_1 h, y_i) \quad (3)$$

$$k_i = f(t_i + c_i h, y_i + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

که در این رابطه $f(t, y) = \dot{y}(t)$ و در نتیجه جواب معادله دیفرانسیل با این روش به صورت زیر خواهد بود.

$$y(t_0 + h) \approx y_0 + h \Phi_{RK} \quad (4)$$

ضرایب a_{ij}, b_i, c_i با یکدیگر دارای روابط زیر هستند.

مختلفی در دسترس است که از آن جمله می توان از [۳] و [۴] نام برد.

۳- تعیین مدار ماهواره به کمک روش لاگرانژ

روش لاگرانژ یکی از روش های کلاسیک تعیین مدار بوده است. در این روش بردار موقعیت و سرعت حول لحظه اولیه بر حسب سری تیلور بسط داده می شوند و سپس بصورت تابعی از بردار موقعیت و سرعت اولیه و ضرایب لاگرانژ نوشته می شوند. در این روش بردار موقعیت در لحظات بعدی با ضرب کردن بردار موقعیت و سرعت اولیه در ضرایب لاگرانژ به دست می آیند.

تعیین مدار ماهواره به وسیله ضرایب لاگرانژ جایگزین مناسبی برای انتگرال گیری مدار ماهواره ها خواهد بود، اگر بتوانیم این ضرایب را در میدان کامل ارائه دهیم. اما این ضرایب به صورت کلاسیک در میدان مرکزی و حداکثر در میدان J2 موجود هستند. در این بخش با گسترش ضرایب لاگرانژ به میدان کامل زمینه استفاده از این ضرایب در تعیین مدار ماهواره های ارتفاع پایین فراهم می شود.

۳-۱- مدل ریاضی ضرایب لاگرانژ

معادله (۱) معادله بنیادین در مسئله تعیین مدار است که روش های متفاوتی برای حل آن ارائه شده است. به صورت کلی اگر نیروهای وارد بر ماهواره را منحصر به ترم مرکزی میدان جاذبه زمین بدانیم، می توان جواب این معادله را به صورت تابعی از موقعیت و سرعت اولیه و ترم های در نظر گرفت که به این ترم ها ضرایب لاگرانژ می گویند [۱۳].

$$\begin{cases} \underline{r}(t) = f(t) \underline{r}(t_0) + g(t) \dot{\underline{r}}(t_0) \\ \dot{\underline{r}}(t) = \dot{f}(t) \underline{r}(t_0) + \dot{g}(t) \dot{\underline{r}}(t_0) \end{cases} \quad (8)$$

جائیکه f, g ضرایب وابسته به زمان لاگرانژ و \dot{f}, \dot{g} مشتقات این ضرایب هستند. در اینجا مسئله تعیین مدار معادل با تعیین این ضرایب خواهد بود [۱۴]. اما معادله (۸) تنها برای حالت کپلری صادق خواهد بود و به صورت کلی اگر بخواهیم این ضرایب رابه کل ترم های

چندجمله ای به نقاط $t_{i-m+1}, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i-m+2}$ برازش می دهیم. در نتیجه مسئله از حالت برونپایی به حالت درونپایی تغییر می کند. به این صورت روش دیگری تحت عنوان آدامز-مولتون ارائه شد [۱۲].

$$y_{n+1} = y_n + \varphi_{AMm} h \quad (8)$$

در این رابطه

$$\varphi_{AMm} = \sum_{j=1}^m \beta_{mj}^* f_{n-m+j+1} \quad (9)$$

اما مشکل این روش در این است که محاسبه $f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$ نیاز به $y(t_{i+1})$ دارد و این همان چیزی است که ما به دنبال آن می گردیم. بنابراین در مواجهه با این مسئله مانند تمامی مسائل که با توابع ضمنی سروکار داریم راه حل استفاده از روش تکرار است.

از آنجائیکه روش آدامز-مولتون به تنهایی قابل استفاده نیست، این روش را با روش آدامز-بشفورتر ترکیب می کنند که نتیجه آن منجر به روشی می گردد که به آن روش پیش بینی-برآورد-تصحیح - برآورد می گردد که مراحل آن به شرح زیر است [۳]:

۱. برآورد مقدار اولیه جواب در t_{i+1} با استفاده از روش آدامز-بشفورتر

$$y_{i+1}^p = y_n + \varphi_{ABm} h \quad (10)$$

۲. برآورد مقدار تابع $f(t, y(t))$ در t_{i+1}

$$f_{i+1}^p = f(t_{i+1}, y_{i+1}^p) \quad (11)$$

۳. تصحیح مقدار جواب اولیه به کمک روش آدامز-مولتون

$$y_{i+1}^c = y_n + h \varphi_{AMm}(f_{i+1}^p) \quad (12)$$

۴. برآورد مقدار تابع $f(t, y(t))$ در t_{i+1} با استفاده از y_{i+1}^c

$$f_{i+1}^c = f(t_{i+1}, y_{i+1}^c) \quad (13)$$

۵. مقدار به دست آمده از مرحله ۴ را وارد مرحله ۳ می کنیم و مقدار تصحیح شده جدید را به دست می آوریم. این کار را تا آنجا ادامه می دهیم که اختلاف این دو مقدار تصحیحی از دقت خواسته شده (تلورانس خطا) کمتر باشد. جزئیات بیشتری از روش های عددی در منابع

میدان جاذبه زمین بسط دهیم باید روابط جدیدی برای این ضرایب به صورت ماتریسی به دست آوریم.

میدان جاذبه زمین بسط دهیم باید روابط جدیدی برای این ضرایب به صورت ماتریسی به دست آوریم.

$$\begin{cases} \underline{r}(t) = \underline{F}(t)\underline{r}(t_0) + \underline{G}(t)\dot{\underline{r}}(t_0) \\ \dot{\underline{r}}(t) = \underline{\dot{F}}(t)\underline{r}(t_0) + \underline{\dot{G}}(t)\dot{\underline{r}}(t_0) \end{cases} \quad (15)$$

جائیکه

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{F}} = \begin{bmatrix} \dot{f}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{f}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{f}_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

و

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{G}} = \begin{bmatrix} \dot{g}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{g}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{g}_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

بیان چندجمله‌ای این ضرایب با استفاده از بسط سری تیلور حول یک نقطه اولیه بوسیله معادله

$$\underline{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \underline{r}}{\partial t^n} \right|_{t=t_0} (t-t_0)^n \quad (20)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\underline{F}^{(n)}(t)\underline{r}_0 + \underline{G}^{(n)}(t)\dot{\underline{r}}_0 \right) \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^n$$

جائیکه

$$\underline{F}^{(n)} = \begin{bmatrix} f_1^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & f_2^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & f_3^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^{(n)} = \begin{bmatrix} g_1^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & g_2^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & g_3^{(n)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

از معادله (۲۰) روشن است که

$$\left. \frac{\partial^n \underline{r}}{\partial t^n} \right|_{t=t_0} = \left(\underline{F}^{(n)}(t)\underline{r}_0 + \underline{G}^{(n)}(t)\dot{\underline{r}}_0 \right) \Big|_{t=t_0} \quad (22)$$

$$\underline{F}^{(n)} = \begin{bmatrix} f_1^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & f_2^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & f_3^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^{(n)} = \begin{bmatrix} g_1^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & g_2^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & g_3^{(n)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

از معادله شماره (۲۱) برای تعیین مقدار $\underline{F}^{(n)}$ و $\underline{G}^{(n)}$ استفاده خواهد شد و ضرایب لاگرانژ بر اساس آن در میدان میدان کامل محاسبه خواهد شد.

۳-۲- ضرایب لاگرانژ در میدان کامل

در نظر گرفتن تغییرات توزیع جرم در داخل زمین باعث می‌شود که شتاب جاذبه علاوه بر مولفه مرکزی دارای مولفه دیگری نیز باشد. برای محاسبه ضرایب لاگرانژ باید مشتقات بردار موقعیت را حساب کنیم. مشتق صفرم و اول بردار موقعیت همان بردار موقعیت و سرعت است که ورودی‌های مسئله هستند. بنابراین اولین مشتقی که نیاز به محاسبه دارد مشتق دوم بردار موقعیت $\ddot{\underline{r}}$ در لحظه موردنظر است. این شتاب با مشتق‌گیری از رابطه

$$f_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_i^{(n)} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^n \quad (18)$$

$$g_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g_i^{(n)} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^n \quad i=1,2,3$$

ارائه می‌گردد:

$$f_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_i^{(n)} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^n \quad (18)$$

$$g_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g_i^{(n)} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^n \quad i=1,2,3$$

و همچنین مشتقات آن‌ها از معادله (۱۹) قابل محاسبه است.

$$\dot{f}_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} f_i^{(n)} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^{n-1} \quad (19)$$

$$\dot{g}_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} g_i^{(n)} \Big|_{t=t_0} (t-t_0)^{n-1} \quad i=1,2,3$$

ضرایب بسط تیلور براساس نیروهای اغتشاشی وارد بر ماهواره تعریف می‌گردند. در این ضرایب

۱ Step-size

قبلی به دست خواهد آمد (مولفه شعاعی) و هرگاه ماتریسی در بردار موقعیت ضرب شود راستای بردار در حالت کلی ثابت نخواهد ماند (مولفه غیرشعاعی) که در واقع این ماتریس مصور آن بردار خواهد بود. ضرایب مجهول معادله (۱۱) به صورت ترم‌هایی از موقعیت و مشتقات جزئی تابع پتانسیل جاذبه نسبت به مختصات منحنی الخط می‌باشد.

$$a = \frac{1}{r} V_r \quad b = \left(\frac{z}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) V_\varphi \quad (13)$$

$$e = \frac{1}{z \sqrt{x^2 + y^2}} V_\varphi \quad h = \frac{1}{y(x^2 + y^2)} V_\lambda$$

$$I = \frac{1}{x(x^2 + y^2)} V_\lambda$$

جائیکه $V_r, V_\varphi, V_\lambda$ مشتقات تابع پتانسیل هستند:

$$V_r = \frac{\partial V(r, \varphi, \lambda)}{\partial r}, \quad (14)$$

$$V_\varphi = \frac{\partial V(r, \varphi, \lambda)}{\partial \varphi},$$

$$V_\lambda = \frac{\partial V(r, \varphi, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

معادله (۱۱) در شکل ماتریسی آن خواهد بود:

$$\ddot{\underline{r}} = (a - b)\underline{r} + \underline{A}\underline{r} = ((a - b)\underline{I} + \underline{A}) \underline{r} \quad (15)$$

مشتق سوم \underline{r} نسبت به زمان

$$\underline{r}^{(3)} = ((\dot{a} - \dot{b})\underline{I} + \dot{\underline{A}}) \underline{r} + ((a - b)\underline{I} + \underline{A}) \dot{\underline{r}} \quad (16)$$

و به شکل مشابه مشتق چهارم آن

$$\underline{r}^{(4)} = ((\ddot{a} - \ddot{b})\underline{I} + \ddot{\underline{A}}) \underline{r} + 2((\dot{a} - \dot{b})\underline{I} + \dot{\underline{A}}) \dot{\underline{r}} + ((a - b)\underline{I} + \underline{A}) \ddot{\underline{r}} \quad (17)$$

با جایگذاری معادله (۱۵) در معادله شماره (۱۷) خواهیم داشت:

$$\underline{r}^{(4)} = ((\ddot{a} - \ddot{b})\underline{I} + \ddot{\underline{A}}) \underline{r} + 2((\dot{a} - \dot{b})\underline{I} + \dot{\underline{A}}) \dot{\underline{r}} + ((a - b)\underline{I} + \underline{A}) \ddot{\underline{r}} \quad (18)$$

پس از اندکی ساده سازی

بسط پتانسیل جاذبه زمین قابل محاسبه است. تابع پتانسیل زمین دارای رابطه زیر است [۱۵].

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \times [1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi)] \quad (9)$$

جائیکه GM حاصلضرب ثابت گرانشی در جرم زمین، شعاع زمین، \bar{C}_{nm} و \bar{S}_{nm} ضرایب هارمونیک میدان پتانسیل جاذبه زمین و $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ توابع لژاندر از درجه n و مرتبه m هستند. (r, φ, λ) نیز مختصات ماهواره در سیستم مختصات کروی است. از آنجا که معادله (۹) بر اساس x, y, z نیست باید برای محاسبه شتاب در سیستم کارتزین، از قاعده زنجیره‌ای در مشتق‌گیری نسبی استفاده کرد [۱۶].

$$\ddot{\underline{r}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = J_{r\varphi\lambda}^{xyz} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در این رابطه $J_{x,y,z}^{r,\varphi,\lambda}$ ماتریس ژاکوبین بین مختصات کارتزین اینرشیال و کروی است. رابطه شتاب جاذبه زمین، می‌تواند به صورت تابعی از بردار موقعیت بازنویسی شود. با استفاده از رابطه ریاضی شتاب جاذبه و با اندکی ساده کردن روابط خواهیم داشت:

$$\ddot{\underline{r}} = (a - b)\underline{r} + \underline{A}\underline{r} \quad (11)$$

که در آن

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -l & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \quad (12)$$

جائیکه ماتریس \underline{A} یک ماتریس قطری است. اولین و دومین ترم در معادله (۱۱) به ترتیب نشان دهنده مولفه شعاعی و غیر شعاعی شتاب جاذبه است. مولفه شعاعی در راستای بردار موقعیت و مولفه غیرشعاعی ترم باقیمانده بردار شتاب جاذبه است. همانطور که می‌دانیم هرگاه اسکالری در بردار ضرب شود برداری در راستای بردار

ترم‌های سری تیلور ضرایب لاگرانژ برای میدان کامل در جدول ۱ ارائه شده است. نحوه محاسبه مشتقات، ضرایب اسکالر a, b, h, e و l در بخش ضمیمه ارائه شده است.

$$\underline{r}^{(4)} = \left[\left[(\ddot{a} - \ddot{b}) + (a-b)^2 \right] \underline{l} + \ddot{A} + 2(a-b)\underline{A} + \underline{A}^2 \right] \underline{r} + 2 \left[(\dot{a} - \dot{b}) \underline{l} + \underline{\dot{A}} \right] \dot{\underline{r}}$$

جدول ۱- ترم‌های سری تیلور ضرایب لاگرانژ در میدان کامل

n	$f_1^{(n)}$	$g_1^{(n)}$	$f_2^{(n)}$	$g_2^{(n)}$	$f_3^{(n)}$	$g_3^{(n)}$
0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
2	$(a-b) - l$	0	$(a-b) + h$	0	$(a-b) + e$	0
3	$(\dot{a} - \dot{b}) - \dot{l}$	$(a-b) - l$	$(\dot{a} - \dot{b}) + \dot{h}$	$(a-b) + h$	$(\dot{a} - \dot{b}) + \dot{e}$	$(a-b) + e$
4	$(\ddot{a} - \ddot{b}) + (a-b)^2 + l^2 - 2(a-b)l - \ddot{l}$	$2(\dot{a} - \dot{b}) - 2\dot{l}$	$(\ddot{a} - \ddot{b}) + (a-b)^2 + h^2 + 2(a-b)h + \ddot{h}$	$2(\dot{a} - \dot{b}) + 2\dot{h}$	$(\ddot{a} - \ddot{b}) + (a-b)^2 + e^2 + 2(a-b)e + \ddot{e}$	$2(\dot{a} - \dot{b}) + 2\dot{e}$

چگونگی انتخاب یک روش عددی مناسب از بین روش‌های موجود است. در این تحقیق با استفاده از روش‌های انتگرال-گیری عددی با خطای کنترل‌شونده، دقت و سرعت محاسبات این روش‌ها را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

۴- نتایج عددی

مطالعات بر اساس مقایسه ۲۴ ساعته مدار محاسبه شده ماهواره CHAMP با مدار انتگرال‌گیری است. ماهواره CHAMP^۲، ماهواره‌ای آلمانی است که در ۱۵ جولای سال ۲۰۰۰ در مدار قرار گرفت. مدار این ماهواره تقریباً دایره‌ای شکل و نزدیک به مدار قطبی (میل ۸۷ درجه) است که ارتفاع اولیه آن ۴۵۴ کیلومتر بوده و مدت زمان یک دور کامل آن ۹۳،۵۵ دقیقه است [۱۷]. اهداف عمده ارسال این ماهواره عبارت بود از: تعیین دقیق طول موج‌های بلند میدان ثقل زمین و تغییرات زمانی آن و تعیین میدان مغناطیسی زمین. در ابتدای این بخش روش‌های انتگرال‌گیری عددی چند پله-ای و تک پله‌ای با یکدیگر مقایسه شده و سپس قابلیت و دقت روش لاگرانژ با نتایج عملی مورد بررسی قرار می‌گیرد. تمامی محاسبات مربوط به روش‌های انتگرال‌گیری عددی و روش لاگرانژ در میدان کامل جاذبه زمین به کمک مدل ژئوپتانسیل EGM96 تا درجه و مرتبه ۱۴۰ انجام شده است [۱۸]. مقادیر اولیه و پارامترهای کیلری در لحظه اولیه برای ماهواره CHAMP در جدول ۲ ارائه شده است. برای تمامی محاسبات این مقادیر بعنوان مقدار اولیه در نظر گرفته شده است.

یکی از مسائلی که در حل معادلات دیفرانسیل و استفاده از انتگرال‌گیری‌های عددی همواره مطرح است،

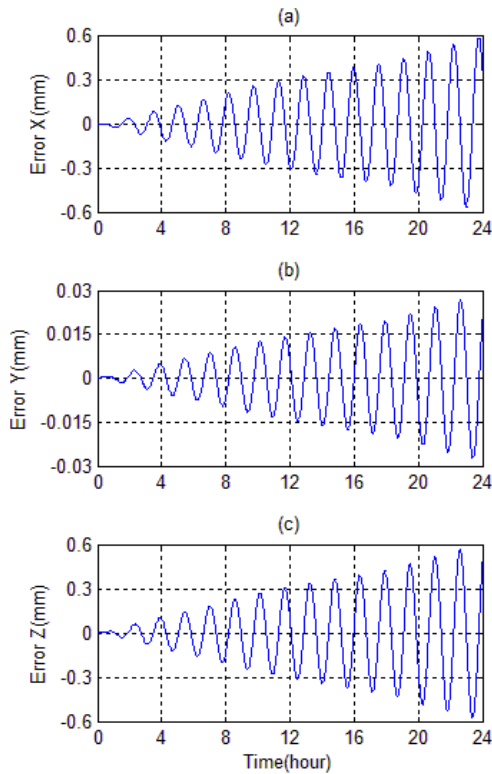
جدول ۲- مقادیر اولیه برای ماهواره CHAMP

Parameters	CHAMP
Date (DAY, MONTH, YEAR)	۱۵ ۰۷ ۲۰۰۰
Time (Hour, Min, Sec)	۰۰ ۰۰ ۰۵
	۶۸۰۰۵۸۰/۱۱۹
\underline{r} (m)	۱۸۰۶/۷۸۷
	۳۸۳۱۳/۸۶۴
	-۴۳/۱۵۲۳
(m/s) $\dot{\underline{r}}$	۳۶۱/۳۵۳۲
	۷۶۶۲/۴۹۱۴
Semi-major axis (m)	۶۸۲۷۹۹۸/۶۷۳
Eccentricity	۰/۰۰۴
Inclination (degree)	۸۷/۳
Right-Ascension of the ascending node (degree)	.
Argument of perigee (degree)	.
True anomaly (degree)	۰/۲۱۰۶

در این تحقیق برای محاسبه مدار انتگرال‌گیری از تابع ODE45 و ODE113 برنامه متلب استفاده شده

^۲ CHALLENGING MINISATELLITE PAYLOAD

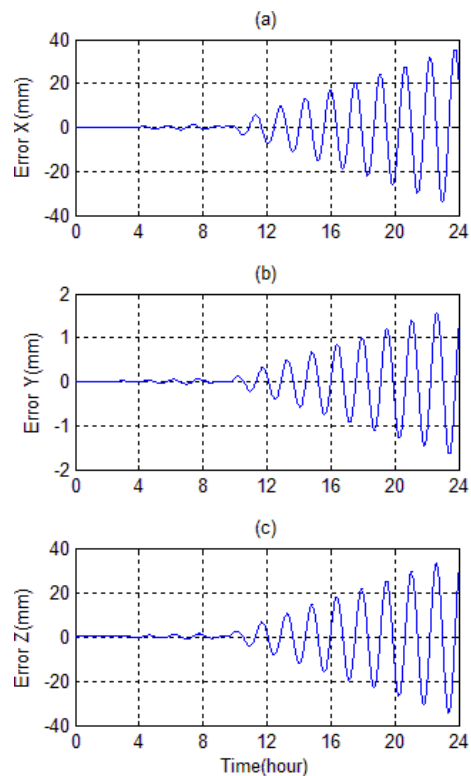
کارترین اینرشیاال در حد ۴ سانتیمتر است. حال اگر تلورانس خطا را برابر با 10^{-16} قرار دهیم، اختلاف این دو مدار کمتر یک میلیمتر خواهد بود. شکل ۲ نشان دهنده اختلاف مدار به دست آمده از روش ODE45 و ODE113 با تلورانس خطای 10^{-16} است.



شکل ۲- اختلاف مدار انتگرال‌گیری روش ODE45 و ODE113 با تلورانس خطای 10^{-16}

اختلاف این دو مدار نشان دهنده این حقیقت است که هرگاه از روش‌های انتگرال‌گیری با خطای کنترل شونده استفاده می‌شود، میزان دقت روش بستگی به تلورانس خطای تنظیم شده دارد. در نتیجه با کوچک کردن تلورانس خطا، جواب به دست آمده از روش‌های تک پله‌ای و چند پله‌ای تا هر میزان دلخواه به یکدیگر قابل نزدیک شدن هستند و تفاوت چندانی از نظر دقت بین دو روش نخواهد بود. در نتیجه با انتخاب روش‌های انتگرال‌گیری عددی با خطای کنترل شونده و انتخاب درست تلورانس خطا عملاً اختلاف فاحشی بین جواب حاصل از روش‌های مختلف انتگرال‌گیری عددی نیست. تنها مسئله‌ای که در این بین باقی خواهد ماند، مسئله زمان محاسبات است. زیرا کوچک کردن تلورانس خطا منجر به افزایش حجم و زمان محاسبات است.

است [۱۹] روش ODE45، روش انتگرال‌گیری عددی تک پله‌ای با خطای کنترل شونده بر اساس روش رونگ-کوتا مرتبه ۴ و ۵ است. در این روش جواب حاصل از رونگ-کوتا مرتبه ۴ و ۵ با یکدیگر مقایسه می‌شوند و اگر اختلاف دو روش از دقت خواسته شده بیشتر بود، فاصله زمانی در انتگرال‌گیری عددی کوچک می‌شود. این کار تا آنجا که اختلاف دو روش از دقت خواسته شده (تلورانس خطا) کمتر شود، ادامه خواهد یافت. روش ODE113 نیز روش انتگرال‌گیری عددی چند پله‌ای با خطای کنترل شونده بر اساس الگوریتم روش پیش‌بینی-برآورد-تصحیح-برآورد است. در ابتدا می‌خواهیم جواب حاصل از روش ODE113 و ODE45 را با تلورانس‌های متفاوت با یکدیگر مقایسه کنیم. شکل ۱ نشان دهنده اختلاف مدار به دست آمده از این دو روش برای ماهواره CHAMP بعد از یک روز است هنگامی که تلورانس خطا برابر با 10^{-12} تنظیم شود.



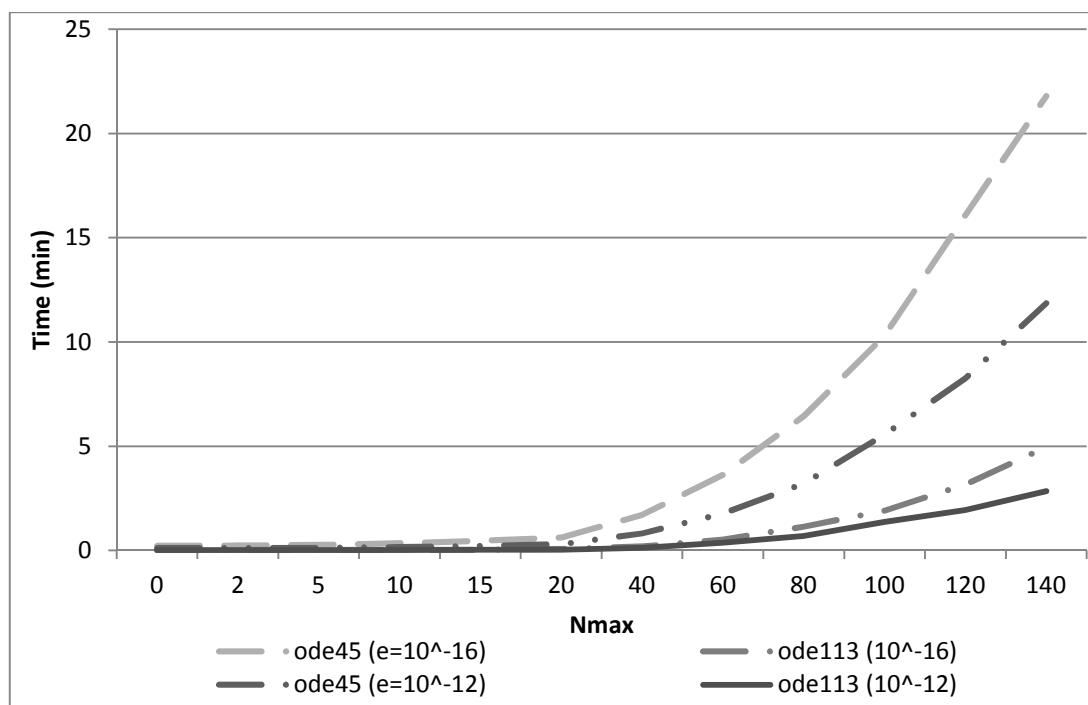
شکل ۱- اختلاف مدار انتگرال‌گیری روش ODE45 و ODE113 با تلورانس خطای 10^{-12}

همانطوری که در شکل ۱ واضح است هنگامی که تلورانس خطا برابر با 10^{-12} تنظیم می‌شود، اختلاف دو مدار انتگرال‌گیری بعد از یک روز برای یک ماهواره ارتفاع پایین در راستای مولفه‌های موقعیت سیستم مختصات

ODE113 با تلورانس خطای 10^{-12} سریعترین و روش ODE45 با تلورانس خطای 10^{-16} کندترین روشها بودند. از نکات قابل توجه در این مقایسه این است که روش ODE113 حتی با تلورانس خطای 10^{-16} از روش ODE45 با تلورانس خطای 10^{-12} سریعتر است. در نتیجه با توجه به مقایسه نتایج مرحله قبل و زمان محاسبات می توان گفت روش ODE113 حتی با تلورانس خطای 10^{-16} مناسبترین روش محاسبه مدار ماهواره های ارتفاع پایین برای کاربردهای دقیق است. برای کاربردهای دیگر نیز باید تلورانس خطا را به نحوی انتخاب کرد که در کمترین زمان ممکن به دقت خواسته شده دست یافت.

در مرحله بعدی به دنبال این هستیم که زمان محاسبات این دو روش را برای تلورانس هاس مختلف خطا مقایسه کنیم. در شکل ۳ زمان محاسبات یک روز (۶) مدار ماهواره CHAMP در میدان جاذبه زمین تا درجه و مرتبه های مختلف (Nmax) به کمک روش های ODE45 و ODE113 با تلورانس خطای 10^{-12} و 10^{-16} نشان داده شده است.

همانطور که انتظار می رفت روش انتگرال گیری چند پله ای ODE113 به دلیل یکبار محاسبه تابع دارای سرعت بالاتری نسبت به روش ODE45 است. با کوچک کردن تلورانس خطا نیز مدت زمان محاسبات نیز افزایش می یابد. در بین روش های انتگرال گیری بررسی شده روش



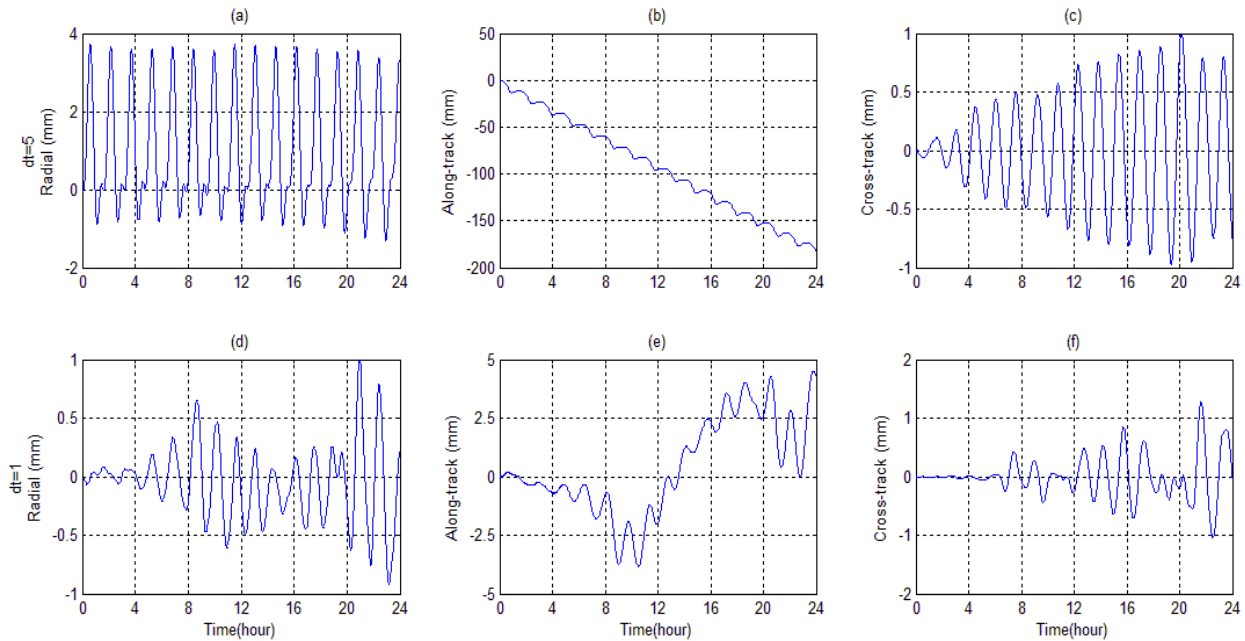
شکل ۳- زمان محاسبات یک روز مدار ماهواره CHAMP در میدان جاذبه زمین تا درجه و مرتبه های مختلف (Nmax) به کمک روش های ODE45 و ODE113 با تلورانس خطای 10^{-12} و 10^{-16}

در شکل ۴ اختلاف مدار لاگرانژ از روش عددی در سه راستای شعاعی^۲، راستای حرکت^۳ و عمود بر مسیر حرکت^۴ ماهواره ترسیم شده است.

در ادامه این بخش نتایج حاصل از روش لاگرانژ به عنوان یک روش شبه-تحلیلی ارائه می گردد. به صورت خاص، علاقه مندیم که جواب روش لاگرانژ را با جواب حاصل از روش های مرسوم حل عددی معادله دیفرانسیل در ماهواره های^۱ LEO مقایسه کنیم.

^۲ Radial
^۳ Along-track
^۴ Cross-track

^۱ Low Earth Orbiters



شکل ۴- اختلاف بین مدار انتگرال گیری شده و مدار به دست آمده از روش لاگرانژ در میدان کامل برای ماهواره CHAMP با $dt=5$ و $dt=1$

کامل محاسبه شده است. به جای صفر فرض کردن ترم های بالاتر، از ترم های میدان کپلری و J_2 بعنوان تقریبی از میدان کامل استفاده شده است. کارهای آینده می تواند تلفیق ضرایب لاگرانژ با مدل مشاهدات برای رسیدن به یک مدار بهینه و استفاده از این ضرایب بعنوان یک ماتریس گذر در پیش بینی بردار وضعیت ماهواره باشد.

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق روش های انتگرال گیری عددی تک پله ای و چند پله ای با خطای کنترل شونده با یکدیگر مقایسه شدند و نشان داده شد که اگر از روش های انتگرال گیری عددی با خطای کنترل شونده استفاده شود، با کوچک کردن تلورانس خطا در انتگرال گیری، اختلاف مدار به دست آمده از دو روش تا میزان دلخواه قابل کوچک کردن است. بعبارت دقیق تر با کوچک کردن تلورانس خطا، فرقی آنچنانی بین روش های انتگرال گیری عددی تک پله ای و چند پله ای با خطای کنترل شونده نیست. تنها مسئله ای باقی می ماند زمان محاسبات است. مقایسه بین روش های مختلف نشان داد که روش ODE113 دارای سرعت مناسبتری نسبت به ODE45 است و با توجه به نزدیک بودن جواب هر دو روش در تلورانس های خطای کوچک، استفاده از این روش در حل معادلات حرکت ماهواره توصیه می گردد.

شکل ۴ (a, b, c) نشان دهنده اختلاف بین مدار انتگرال گیری شده و مدار لاگرانژ در میدان کامل برای یک روز ماهواره CHAMP با $dt=5$ می باشد. بیشترین مقدار خطای روش لاگرانژ برای تعیین مدار ماهواره LEO بعد از یک روز در حدود ۲۰ سانتیمتر است. از آنجائیکه این دقت ممکن است در برخی از کاربردهای دقیق ناکافی باشد، می توان دقت این روش را با کوچک کردن فاصله زمانی (dt) کاهش داد. مانند بسیاری از مشکلاتی که عامل آن خطای برشی^۷ است راه حل کم کردن اثر این خطا کوچک کردن فاصله زمانی نقاط بر حسب ثانیه (dt) است. در اینجا نیز دقت با کاهش فاصله زمانی بین نقاط از $dt=5s$ به $dt=1s$ قابل افزایش است. با اینکار دقت روش لاگرانژ در تعیین مدار ماهواره های LEO بعد از یک روز در حد ۵ میلیمتر خواهد شد. شکل ۴ (d, e, f) نشان دهنده اختلاف بین مدار انتگرال گیری شده و مدار لاگرانژ در میدان کامل برای یک روز ماهواره CHAMP با $dt=1s$ می باشد.

همانطور که در شکل ۴ مشاهده کردید، دقت روش لاگرانژ بعد از یک روز برای یک ماهواره LEO در حد چند میلیمتر است که برای بسیاری از کاربردها در ژئودزی ماهواره ای و علوم فضایی دقتی ایده آل خواهد بود. برای محاسبه ضرایب لاگرانژ، تا ترم پنجم سری تیلور ($n=4$) میدان

^۱ Truncation Errors

پایین فراهم گردید. در بخش نتایج اثبات شد که دقت روش لاگرانژ بعد از یک روز، برای یک ماهواره ارتفاع پایین در حد ۵ میلیمتر است.

در این مقاله روش لاگرانژ نیز بعنوان یک روش شبه-تحلیلی معرفی گردید و با بسط ضرایب لاگرانژ از میدان مرکزی به میدان کامل جاذبه زمین نقیصه این روش برطرف و امکان استفاده از آن در تعیین مدار ماهواره های ارتفاع

مراجع

- [1] Seeber G (2003) Satellite geodesy. Walter de Gruyter, Berlin
- [2] Beutler G (2005) Methods of Celestial Mechanics. Volume II: Application to planetary system, geodynamics and satellite geodesy. Springer, Berlin.
- [3] Montenbruck O, Gill E (2000) Satellite orbits—models, methods, and applications. Springer, Berlin.
- [4] Butcher J C (2003) Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons. ISBN 0471967580.
- [5] Shampine L F (1994) Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Chapman & Hall, New York.
- [6] Montenbruck O (1992) Numerical integration of orbital motion using Taylor series. AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Paper AAS 92-195, Colorado Springs, Colorado.
- [7] Sconzo P, LeSchack A R, Tobey R. (1965) Symbolic computation of f and g series by computer. Astron. J. 70(4):269-270.
- [8] Lin L, Wang X (2003) A method of orbit computation taking into account the earth's oblateness. Chin. Astron. Astrophy. (27)335-339.
- [9] Butcher J C (1985) 'The non-existence of ten stage eighth order explicit Runge-Kutta methods' BIT 25 521-540.
- [10] Ascher U M , Petzold L R (1998) Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations, SIAM, Philadelphia, ISBN 0-89871-412-5.
- [11] Hairer E, Norsett S P , Wanner G (1993) Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems (2nd ed.), Berlin: Springer Verlag, ISBN 978-3-540-56670- 0.
- [12] Quarteroni A, Sacco R, Saleri F (2000) Matematica Numerica, Springer Verlag, ISBN 978-8-847-00077-3 .
- [13] Goodyear W H (1965) Completely general closed-form solution for coordinates and partial derivatives of the two-body problem. Astron. J. 70(3), 189-192.
- [14] Curtis H (2005) Orbital Mechanics for Engineering Students. Embry-Riddle Aeronautical University, Florida.
- [15] Heiskanen W A (1967) Moritz, H. Physical geodesy. Freeman, San Francisco.
- [16] Sharifi M A (2006) Satellite to satellite tracking in the space-wise approach. Ph.D. Thesis, Geodetic Institute, Faculty of Aerospace Engineering and Geodesy, University of Stuttgart.
- [17] Reigber C, Luhr H, Schwintzer P (2002) CHAMP mission status. Adv. Space Res. 30(2), 129-134, 2002.
- [18] Lemoine F G , et al. (1998). The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96, NASA Technical Report NASA/TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland.
- [19] Shampine L F, Reichelt M W (1997) The MATLAB ODE suite, SIAM J. Sci. Comput. 18 , pp. 1–22

ضمیمه

در این بخش ضرایب اسکالر مورد استفاده در ضرایب لاگرانژ و نحوه محاسبه مشتقات آن مورد بحث قرار می‌گیرد. ضرایب اسکالر مورد نیاز برای محاسبه ضرایب لاگرانژ عبارتند از:

$$\begin{aligned} a &= k_a V_r \\ b &= k_b V_\varphi \\ l &= k_1 V_\lambda \\ h &= k_2 V_\lambda \\ e &= k_3 V_\varphi \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{1}{r} \\ k_b &= \left(\frac{z}{r^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ k_1 &= \frac{y}{x(x^2 + y^2)} \\ k_2 &= \frac{x}{y(x^2 + y^2)} \\ k_3 &= \frac{1}{z \sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

تمامی این اسکالرها دارای فرم زیر هستند:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= K(x, y, z) \frac{\partial V(r, \varphi, \lambda)}{\partial \alpha}, \\ \alpha &\in [r, \varphi, \lambda] \end{aligned} \quad (3)$$

در این روابط توابع P و K ، تابعی از موقعیت هستند. بنابراین مشتق اول و دوم تابع P از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{dK}{dt} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + K \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \\ \ddot{P} &= \frac{d^2 K}{dt^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + 2 \frac{dK}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + K \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

چونکه مشتقات تابع K نسبت به زمان با استفاده از قاعده مشتق گیری زنجیره‌ای محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial x_i} \dot{x}_i \\ \frac{d^2 K}{dt^2} &= \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + \frac{\partial K}{\partial x_i} \ddot{x}_i \end{aligned} \quad (5)$$

در اینجا اندیس i اندیس جمع است. با استفاده از همین قاعده مشتق‌گیری، مشتق $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ نسبت به زمان را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) &= \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial r_j} \dot{r}_j \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) &= \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha \partial r_j \partial r_k} \dot{r}_j \dot{r}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial r_j} \ddot{r}_j \end{aligned} \quad (6)$$

به عنوان مثال:

$$\begin{aligned} \frac{dV_\varphi}{dt} &= V_{r\varphi} \dot{r} + V_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} + V_{\varphi\lambda} \dot{\lambda} \\ \frac{d^2 V_\varphi}{dt^2} &= V_{r\varphi} \ddot{r} + V_{\varphi\varphi} \ddot{\varphi} + V_{\varphi\lambda} \ddot{\lambda} \\ &+ (V_{rr\varphi} \dot{r} + V_{r\varphi\varphi} \dot{\varphi} + V_{r\varphi\lambda} \dot{\lambda}) \dot{r} \\ &+ (V_{r\varphi\varphi} \dot{r} + V_{\varphi\varphi\varphi} \dot{\varphi} + V_{\varphi\varphi\lambda} \dot{\lambda}) \dot{\varphi} \\ &+ (V_{r\varphi\lambda} \dot{r} + V_{\varphi\varphi\lambda} \dot{\varphi} + V_{\varphi\lambda\lambda} \dot{\lambda}) \dot{\lambda} \end{aligned} \quad (7)$$

تغییرات مختصات منحنی‌الخط نسبت به زمان نیز از

رابطه زیر محاسبه می‌گردد

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i \\ \dot{\varphi} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i \\ \dot{\lambda} &= \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i + \omega \end{aligned} \quad (8)$$

در این رابطه ω ، سرعت زاویه‌ای زمین است. مشتق دوم نیز به همین شکل محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j + \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \ddot{x}_i \\ \ddot{\varphi} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \ddot{x}_i \\ \ddot{\lambda} &= \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x_j} \right) \dot{x}_i \dot{x}_j + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \right) \ddot{x}_i \end{aligned} \quad (9)$$