

# تغییرات انحنای سطح پوسته زمین در ایران با نظریه تحلیلی تغییر شکل

محمد رضا جعفری<sup>۱\*</sup>، مسعود مشهدی حسینعلی<sup>۲</sup>، بهزاد وثوقی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

mrezajafari2@yahoo.com

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

hossainali@kntu.ac.ir

<sup>۳</sup> دانشیار گروه مهندسی ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

(عضو قطب علمی مهندسی فناوری اطلاعات مکانی)

vosoghi@kntu.ac.ir

(تاریخ دریافت مرداد ۱۳۹۱، تاریخ تصویب تیر ۱۳۹۳)

## چکیده

نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح پوسته زمین، بر مبنای نظریه پوسته در مکانیک محیط‌های پیوسته است. این نظریه یک مدل‌بندی هندسه دیفرانسیلی است که سطح توپوگرافی زمین را رویه‌ای با انحنای متغیر در نظر می‌گیرد. با وجود اینکه در این نظریه از مشاهدات میدان‌های جابجایی سه بعدی استفاده می‌شود اما محاسبات، صرفاً در دو بعد است. مؤلفه ارتفاع را تابعی از مختصات طول و عرض ژئودتیک سطح در نظر می‌گیرد. مشتقات ارتفاع را با روش درونیابی اجزای محدود (با کمک مثلث‌بندی دلونی) می‌توان بدست آورد و در ادامه تنسور متریک و تنسور اساسی دوم سطح زمین را تعیین می‌کند. آنگاه دو کمیت ناوردای تغییر شکل یعنی ((تغییرات انحنای گاوسی و متوسط)) را بررسی نمود. بررسی‌های این تحقیق روی ایستگاه‌های سیستم تعیین موقعیت جهانی GPS شبکه موردی ایران سراسری در اپک‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۵ میلادی است که نشان می‌دهد که مدل تغییرات انحنای (گاوسی)  $1.097 \times 10^{-21} / m^2 yr$  و متوسط  $0.503 \times 10^{-14} / myr =$  پوسته زمین در شمال تنگه هرمز، شواهدی از پدیده فرورانش را در منطقه مکران آشکار می‌کند و بیشترین مقادیر تغییر انحنای هم، با امتداد دو رشته کوه البرز  $(-9.992 \times 10^{-21} / m^2 yr)$  و زاگرس  $(+1.574 \times 10^{-21} / m^2 yr)$  مطابقت دارند. نشست‌ها در مسیرهای شبکه ترازبایی دقیق سراسری ایران نیز اکثراً در مناطق با کاهش انحنای قرار دارند.

**واژگان کلیدی:** نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح، تنسور متریک، تنسور انحنای، انحنای متوسط، انحنای گاوسی، معیارهای ناوردای

تغییر شکل

\* نویسنده رابط

## ۱- مقدمه

علم ژئودزی به اندازه‌گیری هندسه سطح زمین و میدان جاذبه آن و تغییرات آنها می‌پردازد. آنالیز تغییر شکل سطح پوسته زمین بر اساس اندازه‌گیری‌های کلاسیک ژئودتیک، سالیان سال است که موضوع بحث شمار زیادی از محققان در این شاخه از علوم زمین است. در سالهای اخیر، تکنیک‌های ژئودزی فضایی منابع جدیدتر و با دقت بالاتر و قابل اعتمادتری از اطلاعات را جهت تعیین موقعیت ژئودتیک مهیا کرده است که جهت آشکارسازی و کمی‌سازی تغییر شکل‌های سطح زمین به کار رفته‌اند.

در سالیان اخیر برخی از تحقیقات در ژئودزی، آنالیز تغییر شکل را از دیدگاه هندسه دیفرانسیلی و با توجه به نظریه پوسته<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار داده‌اند. آلتینر (۱۹۹۹م)<sup>[۱]</sup> با استفاده از مفاهیم هندسه دیفرانسیلی معرفی شده توسط هیتز (۱۹۸۸م)<sup>[۲]</sup>، روابط نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح پوسته زمین را استخراج کرده است. وی روابط اندازه‌گیری تغییر شکل مبتنی بر هندسه ذاتی<sup>۲</sup> و غیرذاتی<sup>۳</sup> را بر اساس مختصات کارتزین و بیضوی توسعه داده است. او ارتفاع را تابعی از مختصات سطحی در نظر گرفته و جهت محاسبه کمیت‌های تغییر شکلی همچون تغییر انحنای، مشتقات ارتفاع را نسبت به مختصات سطحی محاسبه کرده است. وی جهت محاسبه این مشتقات از سه روش درون‌یابی چندجمله‌ای (اسپیلاین)، کولوکیشن و اجزای محدود مثلثی استفاده کرده و آنها را با هم مقایسه نموده است. وثوقی (۲۰۰۰م)<sup>[۳]</sup> با تکیه بر مفاهیم نظریه پوسته در مکانیک محیط‌های پیوسته، روابط هندسه ذاتی و غیرذاتی تغییر شکل سطح زمین را با دو نگرش لاگرانژی و اولری مورد آنالیز قرار داده است. در ادامه کار او، مقتصدآذر (۲۰۰۷م)<sup>[۴]</sup> به توسعه روابط مبتنی بر هندسه ذاتی پرداخته و نتایج آن را در آنالیز تغییر شکل سطح در شبکه‌ای چگال از نقاط سیستم تعیین موقعیت جهانی (GPS) بررسی کرده و به طبقه بندی سطح تغییر شکل یافته بر اساس علامت تغییر

انحنای گوسی و متوسط پرداخته است و در ادامه به جنبه‌های تصادفی آنالیز تغییر شکل می‌پردازد. رئوفیان (۱۳۸۷ش)<sup>[۵]</sup> تعیین تغییر شکل با استفاده از هندسه ذاتی را با نتایج دو روش متفاوت دیگر در ایران مقایسه نموده است.

آمیغ پی و همکاران (۱۳۹۰ش)<sup>[۶]</sup> به بررسی تغییر شکل ارتفاعی پوسته زمین در منطقه خراسان پرداخته‌اند. نتایج تحقیقات آنها نشان می‌دهد که برای بررسی نحوه تغییر شکل ارتفاعی پوسته زمین، کمیت‌های ناوردایی<sup>۴</sup> (مستقل از سطح مبنا (Datum)) همچون تغییر انحنای گوسی و متوسط، جایگزین مناسبی برای روش‌های دیگر بررسی تغییر شکل مبتنی بر سرشکنی مشاهدات ژئودتیک، می‌باشند. خصوصاً در مناطقی که با مشکل تثبیت سطح مبنا مواجه‌اند.

در این تحقیق سعی شده است با استفاده از روابط استخراج شده توسط آلتینر [۱] و با کمک مفاهیم و روابط وثوقی [۳] به مطالعه تغییرات انحنای سطح پوسته زمین در فلات ایران پرداخته شود. از آنجا که نتایج تحقیق آلتینر [۱] حاصله از نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح با نتایج تحقیقات زلزله‌شناسی و زمین‌شناسی در ناحیه دریای آدریاتیک سازگاری دارد و همچنین وثوقی [۳] الگوی تغییرات انحنای پوسته در شمال اروپا، دریای شمال و نواحی مدیترانه را آشکارکننده شواهدی از پدیده‌های زمین‌شناسی و ژئوفیزیکی می‌داند هدف اولیه این تحقیق این است که با تعیین تغییرات انحنای گوسی و متوسط که معیارهای ناوردایی از نظریه تحلیلی تغییر شکل می‌باشند؛ آیا شواهدی از پدیده‌های مشابه زمین‌شناسی و ژئوفیزیکی در فلات ایران آشکار می‌شود؟

از آنجا که این تحقیق در ادامه تحقیق مشهدی حسینعلی (۱۳۸۹ش)<sup>[۷]</sup> بوده و از نتایج پردازش‌های آن تحقیق استفاده کرده است، هدف دیگر این تحقیق این است که با توجه به مشکلات مطرح شده در مشهدی حسینعلی [۷] به بررسی چگونگی انطباق الگوی تغییرات انحنای پوسته زمین با محدوده‌های نشست در شبکه ترازبایی دقیق سراسری ایران پرداخت.

۱ Shell Theory

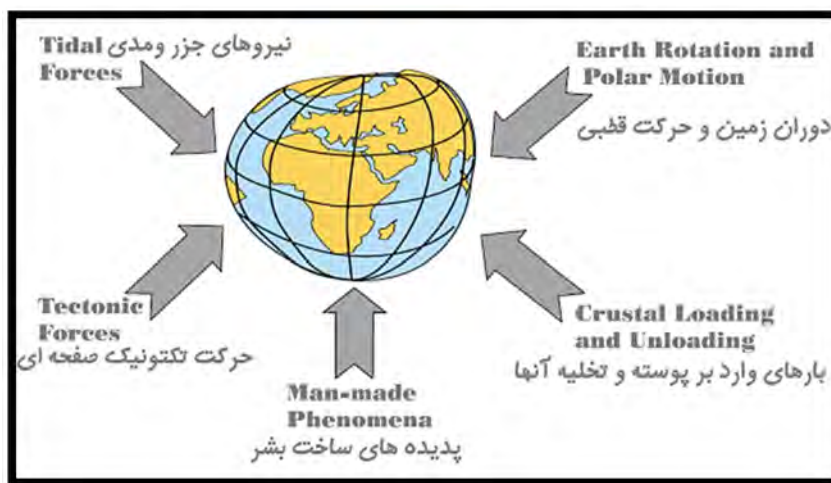
۲ Intrinsic

۳ Extrinsic

۴ Invariant

## ۲- مبانی نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح پوسته زمین

به سبب پدیده‌هایی همچون دوران زمین، حرکت‌های قطبی، بارها، شتاب‌های جزر و مدی، حرکت تکتونیک صفحه‌ای و... زمین در حال تغییر شکل می‌باشد. شکل ۱ پدیده‌های موثر بر تغییر شکل زمین را نشان می‌دهد.



شکل ۱- پدیده‌های موثر بر تغییر شکل زمین (وٹوقی [۱۳])

آن، که اصطلاحاً ضخامت نامیده می‌شود، بسیار کوچکتر از دو بعد دیگر آن است (وٹوقی [۱۳]). بنابراین، پوسته را می‌توان جسم سطح مانند در نظر گرفت. در واقع، توصیف رفتار سه بعدی یک جسم تغییر شکل پذیر با استفاده از میدان‌های سطحی توسط نظریه پوسته انجام می‌شود.

آنالیز تغییر شکل زمین بر پایه مشاهدات ژئودزی زمینی و فرازمینی، یکی از موضوعات بحث در ژئودزی است (وٹوقی [۱۳]). نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح پوسته زمین مبتنی بر نظریه پوسته در مکانیک محیط‌های پیوسته از علم فیزیک است. شکل ۲ جایگاه نظریه پوسته در علم فیزیک را نشان می‌دهد. پوسته یک جسم مادی سه بعدی است که یک بعد



شکل ۲- جایگاه نظریه پوسته در علم فیزیک (وٹوقی [۱۳])

نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح، بر مبنای هندسه دیفرانسیل سطح، سطح توپوگرافی پوسته زمین را به صورت یک سطح منحنی (رویه) تعمیم یافته که در فضای اقلیدسی سه بعدی محاط شده است، در نظر می‌گیرد و فرض می‌کند که سطح زمین به صورت یک سطح منحنی پارامتری شده و نرم (بدون لبه و تیزی) است که مبدأ آن، مرکز جرم زمین است و نگاشت آن به روی سطح مرجعش یک تابع یک به یک است (و ثوقی [۳] و آلتینر [۱]). (رجوع کنید به بخش ۳).

شکل ۳، و ثوقی [۳]، روش‌های مختلف مدل‌سازی هندسی تغییر شکل‌های سطح زمین را نشان می‌دهد و به جایگاه روش ذاتی در آنالیز تغییر شکل سطحی (و یا همان نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح) در میان دیگر روش‌ها اشاره دارد. در رابطه با مزیت‌های این روش باید گفت که این روش بر مبنای میدان جابه‌جایی سه بعدی است و مولفه‌های افقی و مولفه قائم تغییر شکل را با هم شامل می‌شود و سادگی محاسبات در فضاها دو بعدی را نیز حفظ می‌کند و محاسبات نیز مربوط به سطح واقعی زمین می‌باشد.



شکل ۳- روش‌های مدل‌سازی هندسی تغییر شکل‌های سطح زمین (و ثوقی [۳])

$x_i$ ;  $i = \{1,2,3\}$  مختصات کارتزین قبل از تغییر شکل  
 $\bar{x}_i$ ;  $i = \{1,2,3\}$  مختصات کارتزین بعد از تغییر شکل  
 $q^a$ ;  $a = \{1,2,3\}$  مختصات منحنی الخط قبل از تغییر شکل  
 $\bar{q}^a$ ;  $a = \{1,2,3\}$  مختصات منحنی الخط بعد از تغییر شکل  
 $ds$ : المان طولی

$g_{ab}$ : تانسور متریک (تانسور اساسی اول) در میدان سه بعدی  
 $\partial x_i / \partial q^a, \partial x_i / \partial q^b$ : بردارهای پایه در میدان سه بعدی  
(مشتق مختصات کارتزین نسبت به مختصات منحنی الخط سه بعدی)  
 $F$ : سطح

برای مقایسه نتایج روش‌های فوق و آشنایی با تحقیقات انجام شده در این زمینه به و ثوقی [۳] و رؤوفیان [۵] مراجعه شود.

### ۳- روابط نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح پوسته

زمین:

$P$ : نقطه

$V$ : جسم حجیم

$t$ : زمان قبل از تغییر شکل

$\bar{t}$ : زمان بعد از تغییر شکل

$x_i = (X, Y, Z)$ : مختصات کارتزین

$$\delta K = \bar{K} - K \quad \text{تغییر انحنای گوسی}$$

$$\delta H = \bar{H} - H \quad \text{تغییر انحنای متوسط}$$

### ۳-۱- تنسور متریک (تنسور اساسی اول)

در میدان سه بعدی نقاط  $\{P\} \in V$  جسم حجیم مختصات کارتزین قبل از تغییر شکل (در زمان  $t$ ) و بعد از تغییر شکل (در زمان  $\bar{t}$ ) را با

$$x_i, \bar{x}_i \quad i = \{1,2,3\} \quad (1)$$

نشان داده، همچنین مختصات منحنی الخط در زمان‌های  $t$  و  $\bar{t}$  را با

$$q^a, \bar{q}^a \quad a = \{1,2,3\} \quad (2)$$

نشان می‌دهیم. چنانچه  $ds$  المان طولی باشد؛ خواهیم داشت:

$$ds^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial q^a} \frac{\partial x_i}{\partial q^b} dq^a dq^b = g_{ab} dq^a dq^b \quad (3)$$

$g_{ab}$  را تنسور متریک گویند (آلتینر [۱]):

$$g_{ab} = \frac{\partial x_i}{\partial q^a} \frac{\partial x_i}{\partial q^b} \quad (4)$$

مشتق مختصات کارتزین نسبت به مختصات منحنی الخط سه بعدی را بردارهای پایه در میدان سه بعدی گویند.

در میدان دو بعدی نقاط

$$\{P\} \in F \quad \text{سطح}$$

مختصات منحنی الخط سطحی را با

$$u^\alpha, \bar{u}^\alpha \quad \alpha = \{1,2\} \quad (5)$$

نشان می‌دهیم.

همچنین مختصات کارتزین بردار موقعیت نقطه  $P(t)$  از سطح  $F$  بر حسب مختصات سطحی را با

$$x_i(u^\alpha) \quad (6)$$

و مختصات منحنی الخط بردار موقعیت نقطه  $P(t)$  از سطح  $F$  بر حسب مختصات سطحی را با

$$q^a(u^\alpha) \quad (7)$$

نمایش می‌دهیم. تنسور متریک سطح اینگونه تعریف خواهد شد (آلتینر [۱]):

$u^\alpha; \alpha = \{1,2\}$ : مختصات منحنی الخط سطحی قبل از

تغییر شکل

$\bar{u}^\alpha; \alpha = \{1,2\}$ : مختصات منحنی الخط سطحی بعد از

تغییر شکل

$x_i(u^\alpha)$ : مختصات کارتزین بر حسب مختصات منحنی-

الخط سطحی

$q^a(u^\alpha)$ : مختصات منحنی الخط سه بعدی بر حسب

مختصات منحنی الخط سطحی

$q_{\alpha}^c, q_{\beta}^d$ : مشتقات مختصات منحنی الخط سه بعدی نسبت

به مختصات منحنی الخط سطحی  $x_{i,\beta} = \partial x_i / \partial u^\beta$  :

$x_{i,\alpha} = \partial x_i / \partial u^\alpha$  بردارهای پایه سطح (مشتق مختصات

کارتزین نسبت به مختصات منحنی الخط سطحی)

$f_{\alpha\beta}$ : تنسور متریک (تنسور اساسی اول) سطح

$\lambda$ : طول جغرافیایی روی بیضوی دورانی (طول ژئودتیک)

$\varphi$ : عرض جغرافیایی روی بیضوی دورانی (عرض

ژئودتیک)

$h$ : ارتفاع از بیضوی دورانی

$q^a = (q^a = u^\alpha, q^3 \equiv h)$ : مختصات سطح - نرمال

$a = \{1,2,3\}, \alpha = \{1,2\}$

$q^a = (u^1, u^2, q^3 \equiv h)$ : مختصات سطح-نرمال

$q^a = (\lambda, \varphi, h) = (u^\alpha, h)$ : مختصات سطح نرمال

منحنی الخط روی بیضوی دورانی

$a$ : نیم قطر اطول بیضوی

$b$ : نیم قطر اقصر بیضوی

$e^2$ : مربع خروج از مرکزیت بیضوی

$N$ : شعاع قائم اولیه

$M$ : شعاع نصف‌النهاری

$\partial h / \partial \lambda = h_\lambda = h_{,1}$ : مشتق ارتفاع نسبت به طول

ژئودتیک

$\partial h / \partial \varphi = h_\varphi = h_{,2}$ : مشتق ارتفاع نسبت به

عرض ژئودتیک

$h_{\varphi\varphi}$ : مشتق مرتبه دوم ارتفاع نسبت به عرض ژئودتیک

$\delta_a^b$ : دلتای کرونکر

$f$ : دترمینان تنسور متریک

$L_{\alpha\beta}; \alpha, \beta = \{1,2\}$ : تنسور انحنای (تنسور اساسی دوم)

سطح

که  $N$  شعاع قائم اولیه روی هر نقطه از بیضوی به صورت زیر تعریف می‌گردد (وینیچک [۹]):

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (20)$$

$a$ : نیم‌قطر اطول بیضوی

$b$ : نیم‌قطر اقصر بیضوی

$e^2$ : مربع خروج از مرکزیت بیضوی

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (21)$$

$M$ : شعاع نصف‌النهاری روی هر نقطه از بیضوی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (22)$$

چنانچه

$$x_i = (X, Y, Z) \quad (23)$$

با توجه به رابطه (۱۱) و (۱۴) جهت محاسبه  $g_{cd}$  طبق رابطه (۴) داریم:

$$x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial h} \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial h} \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (24)$$

و جهت محاسبه  $f_{\alpha\beta}$  طبق رابطه (۱۰) خواهیم داشت (وثنوقی [۳]):

$$q_{,\alpha}^c = \frac{\partial q^c}{\partial u^\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \lambda} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h_{,1} & h_{,2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$h_{,1}$  و  $h_{,2}$  به ترتیب مشتقات  $h$  نسبت به  $\lambda, \varphi$  می‌باشند. با توجه به مجموعه روابط ۱۸ تا ۲۰، عناصر ماتریس (۲۴) بر روی بیضوی دورانی به شکل زیر می‌باشند (آلتینر [۱]):

$$x_{1,1} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} = -(N + h) \cos \varphi \sin \lambda + \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right) \cos \varphi \cos \lambda \quad (26)$$

$$x_{2,1} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda + \left(\frac{\partial h}{\partial \lambda}\right) \cos \varphi \sin \lambda \quad (27)$$

$$ds^2 = f_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (8)$$

$$f_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} \quad (9)$$

که  $x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial u^\alpha}$ ,  $x_{i,\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial u^\beta}$  بردارهای پایه سطح می‌باشند.

رابطه تنسور متریک سطح  $f_{\alpha\beta}$  با تنسور متریک در فضای اقلیدسی سه بعدی  $g_{ab}$  اینگونه است:

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u^\beta} = \frac{\partial q^c}{\partial u^\alpha} \frac{\partial q^d}{\partial u^\beta} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q^c} \frac{\partial x_i}{\partial q^d} \right) \quad (10)$$

$$f_{\alpha\beta} = q_{,\alpha}^c q_{,\beta}^d g_{cd} \quad (11)$$

$q_{,\alpha}^c$  و  $q_{,\beta}^d$  مشتقات مختصات منحنی الخط سه بعدی

نسبت به مختصات منحنی الخط سطحی می‌باشند.

براساس هیتز [۲]، مختصات سطح-نرمال اینگونه تعریف می‌گردند:

$$q^\alpha = (q^\alpha = u^\alpha, q^3 \equiv h) \quad (12)$$

$$a = \{1,2,3\} \text{ و } \alpha = \{1,2\}$$

$$q^\alpha = (u^1, u^2, q^3 \equiv h) \quad (13)$$

نمایش مختصات سطح-نرمال بردار موقعیت بر حسب مختصات سطحی نیز به قرار زیر خواهد بود:

$$q^\alpha(u^\alpha) = (u^1, u^2, h(u^1, u^2)) \quad (14)$$

نمونه ای از مختصات سطح-نرمال، مختصات جغرافیایی روی بیضوی می‌باشد.

سطح مبنا = بیضوی دورانی

$$q^\alpha = (\lambda, \varphi, h) = (u^\alpha, h) \quad (15)$$

$$u^\alpha = (\lambda, \varphi) \quad (16)$$

$\lambda$ : طول جغرافیایی روی بیضوی دورانی (طول ژئودتیک)

$\varphi$ : عرض جغرافیایی روی بیضوی دورانی (عرض ژئودتیک)

$h$ : ارتفاع از بیضوی

می‌دانیم که رابطه مختصات کارترین با مختصات سطح نرمال یک بیضوی دورانی اینگونه است (وینیچک [۹]):

$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \quad (17)$$

$$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \quad (18)$$

$$Z = \left( N \frac{b^2}{a^2} + h \right) \sin \varphi \quad (19)$$

نظریه تحلیلی تغییر شکل‌های سطحی بعد سوم یعنی  $q^3 \equiv h$  را تابعی از دو بعد سطحی  $(\lambda, \varphi)$  یعنی  $q^3 = q^3(q^\alpha) = q^3(u^\alpha)$  فرض می‌کند (آلتینر [۱]). یعنی:

$$q^3 = q^3(q^\alpha) = q^3(u^\alpha) \quad (۴۰)$$

$$h = h(u^\alpha) = h(u^1, u^2) \equiv h(\lambda, \varphi) \quad (۴۱)$$

از آنجا که تابع  $h(\lambda, \varphi)$  به صورت تحلیلی مهیا نمی‌باشد جهت بدست آوردن مشتقات  $h$  نسبت به  $\lambda, \varphi$  یعنی

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \lambda} = h_\lambda = h_{,1} \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} = h_\varphi = h_{,2} \end{cases} \quad (۴۲)$$

ناگزیر از روش‌های عددی درون‌یابی استفاده خواهد شد.

### ۲-۳- تنسور انحنا (تنسور اساسی دوم)

جهت تنسور انحنا سطح زمین بر اساس سیستم مختصات سطح بیضوی خواهیم داشت (وثوقی [۳]):

$$L_{11} = \frac{1}{\sqrt{f}} \cos \varphi \{h_{\lambda\lambda}(N+h)(M+h) - 2h_\lambda^2(M+h) - (N+h)^2 \cos \varphi \sin \varphi h_\varphi - \cos^2 \varphi (N+h)^2(M+h)\} \quad (۴۳)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{\sqrt{f}} \{ \cos \varphi (N+h) [h_{\varphi\lambda}(M+h) - h_\varphi h_\lambda] + h_\lambda (M+h) [\sin \varphi (M+h) - h_\varphi \cos \varphi] \} \quad (۴۴)$$

$$L_{22} = \frac{1}{\sqrt{f}} \cos \varphi (N+h) \{ h_{\varphi\varphi}(M+h) - 2h_\varphi^2 - h_\varphi M_\varphi - (M+h)^2 \} \quad (۴۵)$$

به طور نمونه  $h_{\varphi\varphi}$  مشتق مرتبه دوم مولفه ارتفاع نسبت به عرض ژئودتیک است.  $f$  نیز دترمینان تنسور متریک می‌باشد:

$$f = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \quad (۴۶)$$

### ۳-۳- معیارهای عددی تغییر شکل

تغییر انحنا گوسی و تغییر انحنایمتوسط دو معیار عددی ناورد ای نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح می‌باشند. تغییر انحنا گوسی (آلتینر [۱])

$$x_{3,1} = \frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right) \sin \varphi \quad (۲۸)$$

$$x_{1,2} = \frac{\partial X}{\partial \varphi} = -(M+h) \sin \varphi \cos \lambda + \left( \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi \cos \lambda \quad (۲۹)$$

$$x_{2,2} = \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -(M+h) \sin \varphi \sin \lambda + \left( \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi \sin \lambda \quad (۳۰)$$

$$x_{3,2} = \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = (M+h) \cos \varphi + \left( \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi \quad (۳۱)$$

$$x_{1,3} = \frac{\partial X}{\partial h} = \cos \varphi \cos \lambda \quad (۳۲)$$

$$x_{2,3} = \frac{\partial Y}{\partial h} = \cos \varphi \sin \lambda \quad (۳۳)$$

$$x_{3,3} = \frac{\partial Z}{\partial h} = \sin \varphi \quad (۳۴)$$

در نتیجه مختصات کووریانت تنسور متریک  $g_{ab}$  فضای اقلیدسی برابر خواهد بود با

$$g_{ab} = (N+h)^2 \cos^2 \varphi \delta_a^1 \delta_b^1 + (M+h)^2 \delta_a^2 \delta_b^2 + \delta_a^3 \delta_b^3 \quad (۳۵)$$

که  $\delta_a^b$  را دلتای کرونگر گویند:

$$\delta_a^b = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \quad (۳۶)$$

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} (N+h)^2 \cos^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & (M+h)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

با توجه به روابط (۲۶) تا (۳۴) و رابطه (۳۷) برای تنسور متریک سطح زمین بر اساس سیستم مختصات سطح بیضیخواهیم داشت (وثوقی [۳] و آلتینر [۱]):

$$f_{\alpha\beta} = \left[ (N+h)^2 \cos^2 \varphi + \left( \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \delta_\alpha^1 \delta_\beta^1 + (\delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 + \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1) \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \left[ (M+h)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \delta_\alpha^2 \delta_\beta^2 \quad (۳۸)$$

$$f_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} (N+h)^2 \cos^2 \varphi + \left( \frac{\partial h}{\partial \lambda} \right)^2 & \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{\partial h}{\partial \varphi} & (M+h)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

در هر المان، تابع مورد نظریا معادله المان یا تابع درونیابی، که معمولا معادله جبری از مرتبه یک است، جایگزین می‌شود. این معادلات، تقریبی از تابع مورد نظر را که غالبا ناشناخته است ارائه می‌کنند. در استفاده از معادلات المان یا توابع درونیابی، غالبا دو نکته مورد توجه قرار می‌گیرد: اولاینکه معادله المان، از لحاظ جبری، برای همه المان‌ها یکسان تعریف می‌شود. دوم اینکه با توجه به هندسه ساده المان‌ها، معادله المان به صورت بی‌واسطه و به سادگی قابل استخراج و محاسبه است. از آنجا که المان، تنها بخش کوچکی از همه فضا و محدوده مورد بررسی است به نظر می‌رسد که می‌توان تنها با تعداد کمی از معادلات جبری، به تقریب خوبی از تابع مورد نظر رسید. در این ارتباط، تعداد یا تراکم المان‌ها از سهم و نقش قابل توجهی برخوردار است. پارامترهای مجهول موجود در هر معادله المان به صورت عددی و برای هر المان از شبکه، به طور مجزا محاسبه می‌گردد؛ فرایندی که با کامپیوتر به خوبی انجام می‌گیرد.

روش اجزای محدود به دنبال یک مدل آزمایشی است که به عنوان جواب تقریبی برای تابع ناشناخته به کار رود. مدلی که تنها به صورت تقریبی در معادله کلی و شرایط مرزی صدق نماید. مدل آزمایشی به شکل جمع تعداد متناهی از توابع به فرم کلی زیر ارائه و مورد استفاده قرار می‌گیرد (وثوقی [۳]):

$$\begin{aligned} \bar{U}(Q^J; A) = & F_0(Q^J) + A_1 F_1(Q^J) \\ & + A_2 F_2(Q^J) + \dots + A_N F_N(Q^J) \end{aligned} \quad (49)$$

در این رابطه،  $Q^J$  نشان دهنده تمامی متغیرهای مستقل موجود در مسئله مورد نظر است. توابع  $F_1(Q^J)$  توابع معلومی هستند که توابع آزمایشی و یا توابع پایه نامیده می‌شوند (وثوقی [۳]).

تابع آزمایشی  $F_0(Q^J)$  با هیچ پارامتری ضرب نشده، هدف از آن برقرار کردن برخی و یا تمامی شرایط مرزی است. از لحاظ عملی، مهم است که از توابع آزمایشی استفاده شود که از نظر جبری تا حد ممکن ساده باشند و به راحتی بتوان با آنها کار کرد. توابع چند جمله‌ای و یا توابع مثلثاتی نمونه‌هایی از این توابعند. ضرایب  $A_1, A_2, \dots, A_N$  پارامترهای نامعلومی هستند که در هر المان، به طور مجزا محاسبه می‌شوند.

$$\delta K = \bar{K} - K = \frac{\det(\bar{L})}{\det(\bar{f})} - \frac{\det(L)}{\det(f)} \quad (47)$$

تغییر انحنای متوسط (آلتینر [۱])

$$\begin{aligned} \delta H = \bar{H} - H = & \frac{1}{2} (f^{\alpha\beta} \bar{L}_{\alpha\beta} - f^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}) \\ = & f^{\alpha\beta} \delta L_{\alpha\beta} + \bar{L}_{\alpha\beta} \delta f^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (48)$$

انحنای گاوسی مستقل از سیستم مختصاتی است که در آن محاسبه شده است و چون کمیتی است که در صورت عدم تغییر فرم اساسی اول سطح، ثابت می‌ماند، آن را از خصوصیات هندسه ذاتی سطح برمی‌شمرند. قدرمطلق انحنای متوسط نیز به سیستم مختصات بستگی ندارد؛ اما جهت آن وابسته به جهت نرمال بر سطح است؛ به همین علت، انحنای گاوسی پارامتر مناسب‌تری به منظور بررسی هندسه سطح است. جهت توضیحات بیشتر رجوع کنید به گوئتس (۱۹۷۰م) [۱۰]، جعفری [۸] و آمیغ پی و همکاران [۶].

#### ۴- روش درونیابی اجزای محدود

در نظریه تحلیلی تغییر شکل سطح زمین، ارتفاع تابعی از مختصات منحنی‌الخط در نظر گرفته می‌شود؛ در نتیجه مدل‌های ریاضی مورد استفاده شامل مشتقات مؤلفه ارتفاع نسبت به مختصات منحنی‌الخط فضا و یا سطح، می‌باشند. این تابع، معمولا نامعلوم است؛ بنابراین، مشتقات جزئی‌اش باید به صورت عددی برآورد گردد (وثوقی [۳]).

در روش اجزای محدود، محدوده مسئله به نواحی و محدوده‌های کوچکتر تقسیم می‌شود که آنها را اجزاء و یا المان می‌نامند. المان‌های مجاور بدون همپوشانی به هم متصل می‌شوند به نحوی که هیچگونه گپی (فضای خالی) بین المان‌های مجاور وجود نداشته باشد. شکل المان‌ها تا حد ممکن به ساده‌ترین شکل ممکن در نظر گرفته می‌شود. به طور مثال، از المان‌های مثلثی شکل (با سه رأس) و یا چهارضلعی شکل در فضاهای دوبعدی و یا چهاروجهی و پنج وجهی در فضاهای سه بعدی استفاده می‌شود. فرآیند افرازبندی یک محدوده به مجموعه‌ای از المان‌ها، یعنی ایجاد شبکه، امروزه با استفاده از برنامه‌های کامپیوتری، تا حد زیادی یک فرآیند اتوماتیک و خودکار محسوب می‌شود (وثوقی [۳]).



ایستگاه‌های این شبکه و نرخ جابجایی‌های قائم ایستگاه‌ها مابین اپک‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۵ میلادی را نمایش می‌دهد. موقعیت ایستگاه‌ها و بردارهای سرعت شبکه موردی ایران سراسری و همچنین انطباق آنها با برخی از مدل‌های ژئوفیزیکی را در مشهدی حسینعلی [7] خواهید یافت. وی انحراف معیار مولفه ارتفاعی بردار سرعت ایستگاه‌ها را مابین ۱,۳۸ تا ۳,۳۲ میلی‌متر در سال در سطح اطمینان ۹۵ درصد برآورد نموده است.

ورنات و همکاران (۲۰۰۴م) [۱۲] نیز برآوردی از دقت اندازه‌گیری‌های اپک ۱۹۹۹ و ۲۰۰۱ را ارائه می‌کنند، به طور مثال دقت مولفه ارتفاعی طول بازها را ۳,۷ و ۲,۳ میلی‌متر برای اپک‌های ۱۹۹۹ و ۲۰۰۱ محاسبه کرده‌اند.

## ۶- تجزیه و تحلیل نتایج عددی

شکل ۵ نشان‌دهنده نرخ تغییرات انحنای گاوسی در واحد  $10^{-21}/m^2/yr$  است که با استفاده از روش درون‌یابی اجزای محدود محاسبه شده است. خطوط مستقیم قهوه‌ای رنگ نشان‌دهنده انحنای مثلثی است که از روش مثلث‌بندی دلونی بدست آمده‌اند.

براساس نتایج مندرج در این شکل، در شمال ایران (پایین دریای خزر) شاهد بیشترین تغییر منفی انحنای گاوسی (کاهش انحنای گاوسی  $= -9.992 \times 10^{-21}/m^2/yr$ ) می‌باشیم. این محدوده کاهش انحنای تا مقدار زیادی با رشته کوه‌های البرز انطباق دارد. محدوده این منطقه کاهش انحنای، در جهت شرق تا ایستگاه KASH واقع در کاشمر و در جهت جنوب شرقی تا ایستگاه ROBA واقع در رباط خان در منطقه دشت کویر امتداد یافته است. در شمال شرق ایران در حوالی منطقه کلات نادری، نیز می‌توان کاهش انحنای گاوسی را ملاحظه نمود.

بیشترین مقادیر تغییر انحنای گاوسی مثبت (افزایش انحنای گاوسی  $= +1.574 \times 10^{-21}/m^2/yr$ ) در مرکز ایران حوالی ایستگاه SHAH در شهرکرد مشاهده می‌شود. این محدوده تا ایستگاه ARDA در اردکان در جهت غرب توسعه یافته است.

این محدوده نیز با بخشی از رشته‌کوه‌های زاگرس انطباق دارد. در شمال تنگه هرمز و جنوب ایستگاه RAZD نیز افزایش انحنای گاوسی  $(1.097 \times 10^{-21}/m^2/yr)$  مشاهده

توجه به لزوم پیوستگی مدل در نقاط روی مرز مابین المان‌ها، معیاری مهم در مرحله تشکیل المان‌ها می‌باشد. مشابه پیوستگی توابع، پیوستگی بین المانی می‌تواند از کلاس‌های مختلف پیوستگی از  $C^0$  تا  $C^\infty$  منظور گردد. با تعریف شرایط مرزی بین المان‌ها، مسئله اجزای محدود جهت به کارگیری مهیا می‌باشد. این شرایط باید بوسیله مدل‌های المان‌های اطراف مرزهای بین المانی تایید شوند (و ثوقی [۳]).

مثلث‌های مسطح، سهل‌الوصول‌ترین هندسه برای المان‌ها، در آنالیز اجزای محدود دو بعدی است. برای این هدف از الگوریتم مثلث‌بندی دلونی<sup>۵</sup> استفاده شده است. در این روش با توجه به موقعیت رئوس موجود که به طور نامنظم، پخش شده‌اند سعی می‌شود تا حد امکان، مثلث‌ها، نزدیک به مثلث متساوی الاضلاع باشند. این روش افزای دارای جوابی منحصر به فرد است. به عبارت دیگر به ازای P نقطه، تنها یک مثلث‌بندی دلونی وجود دارد [۱۱]. با توجه به ویژگی‌های مثلث‌بندی دلونی، می‌توان آن را به عنوان بهینه‌ترین مثلث‌بندی از لحاظ هندسی معرفی کرد.

در این تحقیق، با توجه به رابطه (۴۹)، در هر المان مثلثی، ارتفاع را تابعی خطی از طول و عرض ژئودتیک نقاط در نظر می‌گیریم:

با جایگذاری  $(\lambda, \rho)$  رئوس هر المان مثلثی در رابطه فوق، و با تشکیل سه معادله سه مجهولی می‌توان ضرایب را برای هر المان محاسبه نمود.

## ۵- داده‌های ژئودتیک فضایی مورد استفاده

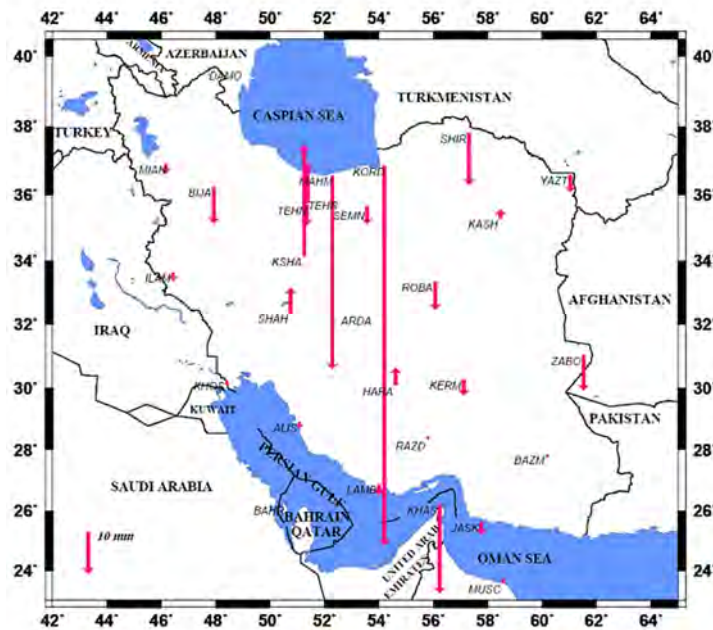
شبکه موردی ایران سراسری، نخستین شبکه سراسری ژئودزی ماهواره‌ای کشور است که در سال‌های ۱۹۹۹، ۲۰۰۱ و ۲۰۰۵ میلادی اندازه‌گیری شده است. این شبکه متشکل از ۲۸ ایستگاه موردی GPS است که سراسر کشور را پوشش می‌دهند. هدف عمده از ایجاد این شبکه GPS در کشور ایران، فراهم کردن امکان مطالعه پدیده‌های ژئودینامیکی و زمین‌شناسی جهت پیش‌بینی و کشف زمین‌لرزه‌ها و نیز بدست آوردن درک بهتری از حرکات پوسته زمین عنوان می‌شود. شکل ۴ پراکندگی

<sup>۵</sup> Delaunay Triangulation

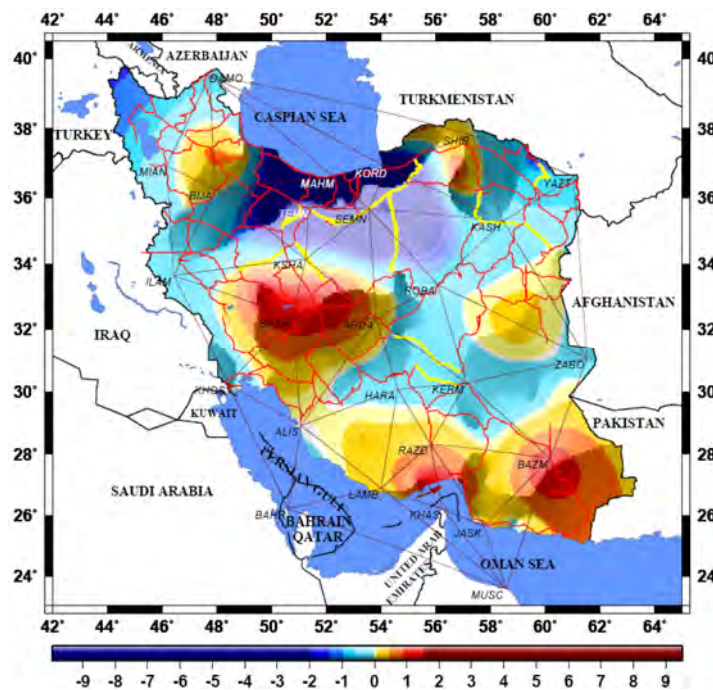
مسیرهای قرمز و زرد در شکل (۵)، نشان دهنده مسیرهای شبکه ترازیبی دقیق سراسری سازمان نقشه برداری کشور است. تکرار اندازه‌گیری این شبکه در مسیرهای زرد، نشان دهنده نشست در محدوده مسیرهای ترازیبی دقیق این مناطق است. مشاهده می‌شود که نشست‌ها اکثراً در مناطق با کاهش انحنای گاوسی قرار دارند.

می‌شود. می‌تواند این افزایش انحنای اشاره‌ای به فرورانش لیتوسفر اقیانوسی در منطقه مکران و فعل و انفعالات مابین فرآیند کوهزایی جوان زاگرس و منطقه فرورانش مکران باشد (ورنانت و همکاران [۱۲]).

در جنوب شرق ایران، اطراف ایستگاه BAZM در بزمان نیز افزایش انحنای گاوسی مشاهده می‌شود. دو ناحیه کوچک افزایش انحنای گاوسی نیز در شمال شرق و شمال غرب ایران مشاهده می‌شود.



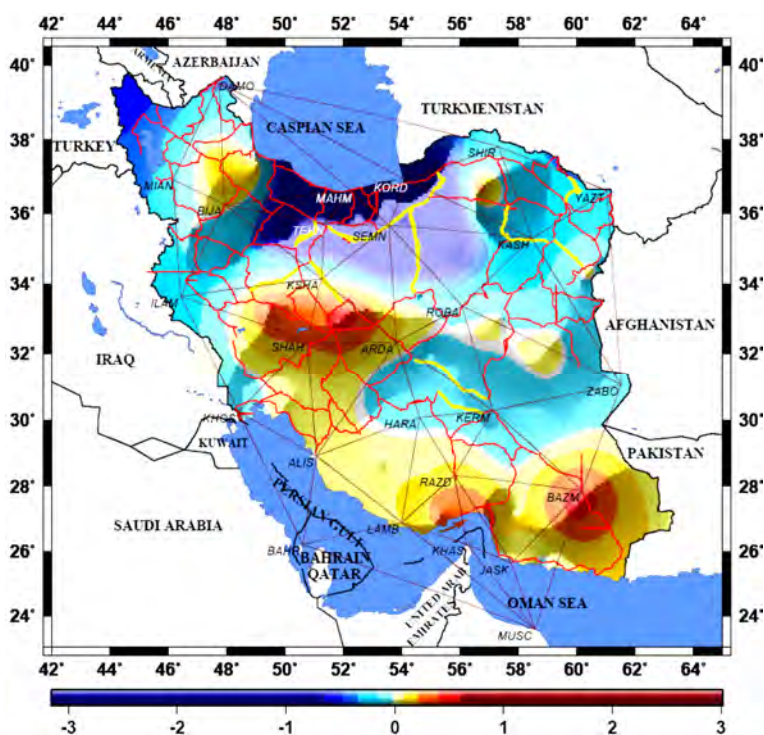
شکل ۴- نرخ جابجایی‌های قائم نقاط ایستگاه‌های شبکه موردی ایران سراسری



شکل ۵- نرخ تغییرات انحنای گاوسی در واحد  $10^{-21}/m^2/yr$

الگوی تغییرات انحنای متوسط بسیار شبیه الگوی تغییرات انحنای گاوسی می‌باشد.

شکل ۶ نرخ تغییرات انحنای متوسط را در واحد  $10^{-14}/myr$  نمایش می‌دهد. این نتایج با روش اجزای محدود بدست آمده است. این شکل گویای آن است که



شکل ۶- نرخ تغییرات انحنای متوسط در واحد  $10^{-14}/myr$

بهم‌خوردگی قاره‌ای (Continental Collision) (زاگرس، قفقاز، البرز، کپه داغ و تالش)، فرورانش (Subduction) لیتوسفر اقیانوسی (مکران) و یک انتقال سریع (Sharp Transition) از یک فرآیند کوهزایی جوان (زاگرس) به یک ناحیه فرورانش (مکران) (شکل ۷).

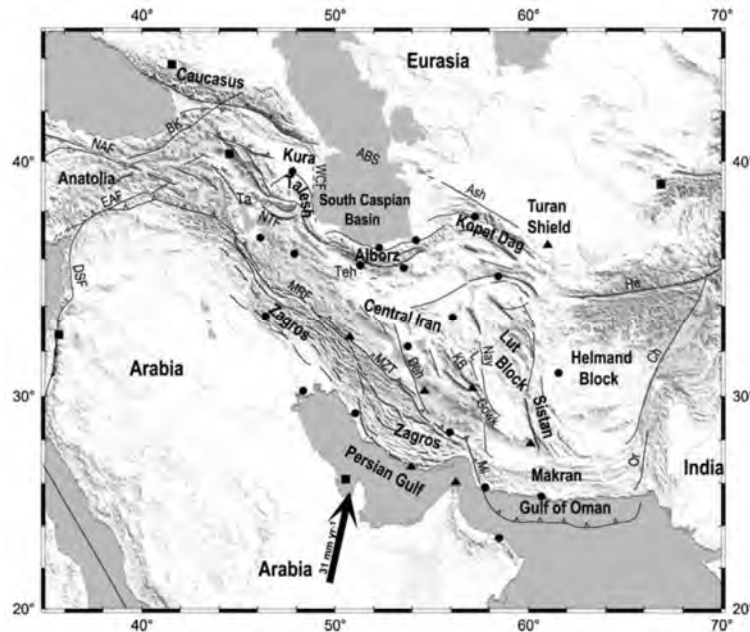
ژئودینامیک منطقه تحت الشعاع همگرایی بین صفحات عربستان و اوراسیا قرار دارد (شکل ۷).

سوابق تاریخی و لرزه‌ای اشاره دارد به اینکه در ایران یک تغییر شکل قاره‌ای در حال وقوع است که در چندین رشته کوه متمرکز شده است، این رشته کوه‌ها در میان خود بلوک‌های تقریباً غیرلرزه‌خیز را احاطه می‌کنند (همچون بلوک ایران مرکزی، بلوک لوت و بلوک جنوب دریای خزر) (شکل ۷).

## ۷- نتیجه گیری

با توجه به اینکه چگالی پخش نقاط در منطقه مورد مطالعه، پایین می‌باشد، به نظر می‌رسد که روش‌های درون‌یابی قادر نخواهند بود که ارتفاع‌ها را به خوبی تقریب و تکثیر نمایند. در نتیجه مشتقات ارتفاع نیز چندان با واقعیت سطح زمین انطباق نخواهند داشت. برای توضیحات بیشتر به جعفری [۸] و مشهدی حسینعلی [۷] مراجعه نمایید؛ اما به هر حال به نظر می‌رسد که نتایج این تحقیق توانسته است شواهدی از پدیده‌های زمین‌شناسی و ژئوفیزیکی فلات ایران را آشکار کند.

به گفته ورنانت و همکاران [۱۲] ایران یک آزمایشگاه ایده‌آل برای مطالعه کینماتیک و دینامیک عکس‌العمل‌های صفحات تکتونیکی است زیرا که با فرآیندهای تکتونیکی متفاوتی روبه‌رو خواهید بود، همچون



شکل ۷ - نقشه تکتونیکی ساده شده خاورمیانه به همراه توپوگرافی (ورنانت و همکاران [۱۲])

حرکت لغزشی امتدادی (Strike-Slip) بزرگی در طول ناحیه گسل میناب-زندان-پالامی گزارش شده است که منطبق است بر منطقه انتقالی مابین ناحیه بهم خوردگی زاگرس و فرورانش مکران (ورنانت و همکاران [۱۲]) (گسل Mi در شکل ۷).

در این تحقیق ما، الگوی تغییرات انحنای متوسط بسیار شبیه الگوی تغییرات انحنای گاوسی می‌باشد. در هر دو الگو در شمال تنگه هرگز افزایش انحنای مشاهده می‌شود که می‌تواند اشاره‌ای به فرورانش لیتوسفر اقیانوسی در منطقه مکران و انفعالات مابین فرآیند کوهزایی جوان زاگرس و منطقه فرورانش مکران باشد (شکل ۵ و ۶). همچنین باید گفت که مشاهده می‌شود که نشست‌های موجود در مسیرهای شبکه ترازایی دقیق سراسری ایران، اکثراً در مناطق با کاهش انحنای قرار دارند (شکل ۵ و ۶).

همگرایی عربستان- اوراسیا ابتدا در جنوب ایران در چین‌خوردگی (Fold) و کمربند فشاری (Thrust Belt) زاگرس رخ داده است و اوج فرآیند کوهزایی با بالآمدگی زاگرس و البرز و فرونشست جنوب دریای خزر و تکمیل بسته شدن اقیانوس نئوتتیان نشان داده می‌شود (ورنانت و همکاران [۱۲]) (شکل ۷).

نتایج این تحقیق ما نشان می‌دهد که بیشترین مقادیر تغییر انحنای با امتداد دو رشته کوه البرز و زاگرس مطابقت دارد (شکل ۵ و ۶).

مطابق با مدل تکتونیک صفحه‌ای NUVEL-1A بر اساس آنالیز گسترش بستر دریا، سیستم گسل‌ها و بردار لغزش زمین‌لرزه‌ها، صفحه عربستان در حال حرکت در جهت شمال شرقی نسبت به صفحه اوراسیا می‌باشد (علامت پیکان پررنگ در شکل ۷). داده‌های ژئودتیک نیز تقریباً حاکی از همان جهت می‌باشد. این همگرایی مربوط به کوتاه‌شدگی درون قاره‌ای همه جای ایران به استثنای حاشیه جنوب شرقی می‌باشد، جایی که دریای عمان فرورانشی کرده است در جهت شمال به زیر مکران (ورنانت و همکاران [۱۲]).

- [1] Altiner Y. (1999). "Analytical Surface Deformation Theory For Detection of the Earth's Crust Movements", Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [2] Heitz S. (1988). "Coordinates in Geodesy", Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [3] Voosoghi B. (2000). "Intrinsic Deformation Analysis of the Earth Surface Based on 3-Dimensional Displacement Fields Derived From Space Geodetic Measurements", PhD thesis, Institute of Geodesy, University at Stuttgart, Germany.
- [4] Moghtasad-Azar K. (2007). "Surface Deformation Analysis of Dense GPS Networks Based on Intrinsic Geometry Deterministic and Stochastic Aspects", PhD thesis, Institute of Geodesy, University at Stuttgart, Germany.
- [5] رؤوفیان نایینی، م، ۱۳۸۷ش، برآورد تانسور کرنش در شبکه ژئودینامیک کشور، پایان نامه کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
- Raofian Naeeni M. (2008). "The Computation of Strain Tensor in the Geodynamic Network of Iran", M. Sc. Thesis, Faculty of Engineering, University of Tehran, Iran
- [6] آمیغ پی، م، وثوقی، ب، عربی، س، ۱۳۹۰ش، تغییر انحنای کمیته ناوردا به منظور بررسی تغییر شکل ارتفاعی شبکه‌های کنترل ژئودزی، تحقیق موردی: بررسی فرونشست خراسان با استفاده از مشاهدات ترازبایی دقیق، مجله ژئوفیزیک ایران، جلد ۵، شماره ۲، ۱۱۶-۱۲۹.
- Amighpey, M., Voosoghi, B., Arabi, S. (2011). "The Change of Curvature as an Invariant Measure for Studying Height Deformation in Geodetic Control Networks", Iranian Journal of Geophysics, v.5, no.2, p116-129
- [7] مشهدی حسینعلی، م، حیدری، ح. ر، ۱۳۸۹ش، تعیین الگوی تغییر شکل ارتفاعی سطح پوسته زمین در فلات ایران با استفاده از داده‌های شبکه GPS موردی ایران سراسری، نشریه مهندسی فناوری اطلاعات مکانی، سال یکم، شماره دوم، ۴۷-۶۴.
- [8] جعفری، م. ر، ۱۳۸۸ش، بررسی و تعیین تغییرات انحنای پوسته زمین در ایران بوسیله مشاهدات GPS، پایان نامه کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی نقشه‌برداری، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
- Jafari, M. (2009). "An Investigation in the Change of the Curvature of the Earth's Crust in Iran Using the GPS Results", M. Sc. Thesis, Faculty of Geodesy and Geometrics Engineering, K.N. Toosi University of Technology
- [9] Vanicek P. and Krakiwsky E. (1986). "Geodesy: The Concepts", North-Holland.
- [10] گوئتس، آ، ۱۳۷۲ش، آشنایی با هندسه دیفرانسیل، ترجمه عالم زاده، م، استاد باشی زاده، م، انتشارات علوی، تهران.
- Goetz, A., (1970), "Introduction to differential geometry", Addison Wesley
- [11] "Delaunay Triangulation". From Wikipedia, The Free Encyclopedia Web Resource. <http://Delaunay triangulation - Wikipedia, the free encyclopedia.htm>
- [12] Vernant Ph. et al (2004), "Present-day Crustal Deformation and Plate Kinematic in The Middle East Constrained by GPS Measurement in Iran and Northern Oman". Geophys. J. Int., v. 157, p. 381-398.

