

# بررسی تاثیر استفاده از روش‌های آستانه‌گذاری (در فضای موجک) بر میزان کاهش نویزها روی داده‌های ایستگاه‌های دائمی GPS

خسرو مقتصد آذر<sup>۱\*</sup>، مهدی غلام‌نیا<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>استادیار گروه مهندسی نقشه برداری - دانشکده عمران - دانشگاه تبریز  
moghtased@tabrizu.ac.ir

<sup>۲</sup>کارشناس ارشد ژئودزی - گروه مهندسی نقشه برداری - دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه زنجان  
mehgholamnia@gmail.com

(تاریخ دریافت تیر ۱۳۹۲، تاریخ تصویب تیر ۱۳۹۳)

## چکیده

هدف از انجام این تحقیق استفاده از تکنیک موجک‌ها برای کاهش اثر نویز در سری‌های زمانی بلند مدت GPS با اعمال آستانه‌گذاری‌های مختلف و مقایسه تاثیر آنها در روند کاهش نویز می‌باشد. روشهای آستانه‌گذاری شامل: حد آستانه جریمه، راهکار بیرگه - ماسارت، روش هیبریدی شور - شرینگ، روش آستانه‌گذاری سراسری، روش مینیماکس و روش آستانه‌گذاری با استفاده از کمینه کردن برآورد ناریب ریسک اشتاین بودند که برای مقایسه تاثیر آنها در کاهش نویزها از سه مدل استوکاستیک برای ترکیب نویزها در سری‌های زمانی ایستگاه‌های دائمی GPS استفاده شد: الف) مدل شامل نویز سفید (مدل I)، ب) مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز تصادفی (مدل II)، ج) مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز فلیکر (مدل III). برای انجام محاسبات و تحلیل‌های عددی، به تعداد ۲۶۴ ایستگاه GPS از آرشیو SOPAC با پوشش زمانی ۱۰ ساله (از ژانویه ۲۰۰۱ تا ژانویه ۲۰۱۱) جهت انجام آنالیز و محاسبات انتخاب گردید. این داده‌ها بصورت خام بوده و هیچ گونه عملیات نویزبری روی آنها انجام نگرفته بود. نتایج حاصل نشان می‌دهد که از بین روشهای آستانه‌گذاری، در مدل شامل نویز سفید (مدل I): روش حد آستانه جریمه و روش آستانه‌گذاری با استفاده از کمینه کردن برآورد ناریب ریسک اشتاین قادر به کاهش فراوانی دامنه‌های کوچکتر می‌باشند، در صورتی که روشهای مینیماکس و هیبریدی شور - شرینگ قادر به کاهش فراوانی دامنه‌های بزرگتر از نویز سفید را دارند. راهکار بیرگه - ماسارت و روش آستانه‌گذاری سراسری هم قادر به کاهش فراوانی دامنه‌های کوچکتر و هم کاهش فراوانی دامنه‌های بزرگتر می‌باشند. در مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز تصادفی (مدل II) و مدل ترکیبی شامل نویز سفید و فلیکر نویز (مدل III)، تمامی روشها قادر به کاهش فراوانی دامنه‌های کوچکتر و بزرگتر از نویز سفید (در هر دو مدل) به یک میزان هستند. این در حالی است که برای نویز تصادفی و نویز فلیکر (به ترتیب در هر دو مدل) روش حد آستانه جریمه و روش آستانه‌گذاری با استفاده از کمینه کردن برآورد ناریب ریسک اشتاین قادر به کاهش فراوانی دامنه‌های کوچکتر می‌باشند، در صورتی که روشهای مینیماکس و هیبریدی شور - شرینگ قادر به کاهش فراوانی دامنه‌های بزرگتر از نویز رنگی را دارند. راهکار بیرگه - ماسارت و روش آستانه‌گذاری سراسری قادر به کاهش فراوانی دامنه‌های کوچکتر و بزرگتر از نویز رنگی می‌باشند.

**واژگان کلیدی:** سری‌های زمانی، نویز، آنالیز موجک، روش‌های آستانه‌گذاری

\* نویسنده رابط

## ۱- مقدمه

داده‌های بدست آمده از سری‌های زمانی ایستگاه‌های دائمی GPS به عنوان منابع با ارزشی در تفسیر ژئوفیزیکی و ژئودتیکی در علوم زمین به حساب می‌آیند. هر سری زمانی را می‌توان متشکل از دو بخش دانست: بخش سیگنال که در بر گیرنده اطلاعات مفید در مورد رفتار سری زمانی بوده و بخش نویز که ناخواسته بوده و باعث آلوده شدن سیگنال اصلی می‌شود.

سیگنال سری زمانی GPS غیر خطی بوده و در آن اثراتی از مولفه‌های سالیانه، نیم سالیانه، سال تروپیکال، پرپود چندلر مشاهده شده است [۲]. علاوه بر اثرات سیستماتیک فوق، برخی از ایستگاه‌ها دارای اثر سیستماتیک مربوط به تغییر آنتن گیرنده ایستگاه<sup>۱</sup> نیز می‌باشند که شناسایی و حذف آن دارای اهمیت می‌باشد. به طور معمول، روند خطی از سیگنال سری زمانی را مربوط به حرکات و جابجایی پوسته آن منطقه (یا ناحیه) می‌دانند که از آن در برآورد تنسور استرین و تنسور تغییر انحناء می‌توان استفاده کرد [۲۵].

برآورد سیگنال سری زمانی دارای اهمیت بالایی می‌باشد و مدل سازی ناقص آن و همچنین عدم جداسازی نویز از سیگنال باعث تفسیر نادرست نتایج ژئودتیکی و ژئوفیزیکی خواهد شد [۳۲]. مهمترین عوامل ایجاد نویز عبارتند از نداشتن مدل مدار ماهواره، شیفت های ناشی از چهار چوب مرجع، عدم مدولاسیون شیفت مرکز آنتن، ناپایداری ساختمان ایستگاه، نقص مدل های اتمسفریک و تصحیحات یونسفریک. هر چند که هنگام پردازش داده ها توسط نرم افزارهای GPS یک سری تصحیحات با استفاده از مدل های تقریبی به داده‌ها اعمال می‌شوند ولی این مدل‌ها به طور کامل قادر به حذف نویز نبوده و آثار آنها در سری‌های زمانی باقی می‌ماند.

برای کاهش اثر نویز، ابتدا برآوردی از میزان و نوع آنها در سری زمانی لازم است. وجود نویز سفید<sup>۲</sup> و نویز فلیکر<sup>۳</sup> و نویز تصادفی<sup>۴</sup> در سری زمانی GPS نشان داده شده است [۳۱]. روشهای مختلفی برای برآورد میزان دامنه نویزها وجود دارد که از آن جمله می‌توان به روشهای آنالیز توان نویز،

روش برآورد کمترین مربعات مولفه‌های واریانس و همچنین برآورد درست نمائی ماکزیمم اشاره کرد [۲، ۸، ۲۶]. بطور کلی برآورد سیگنال و نویز در سری های زمانی GPS دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشد، در صورتی که اثر سیستماتیک مانند مولفه سالیانه یا نیم سالیانه در سری زمانی باقی مانده باشد، دامنه برآورد شده برای نویزها به صورت غیر واقعی بالا خواهد بود [۲]، که این موضوع اهمیت جداسازی سیگنال و نویز را در سری زمانی GPS نشان می‌دهد.

موجک<sup>۵</sup> تابع ریاضی است که یک سیگنال پیوسته را به مولفه های فرکانسی اش تجزیه می‌کند. تبدیل موجک نسبت به تبدیل فوریه خصوصیت محلی سازی بهتری دارد، زیرا توابع پایه در تبدیل فوریه توابع سینوسی و کسینوسی بوده و دامنه آنها در کل بازه ثابت است، اما در توابع موجک بیشتر انرژی آنها در بازه کوچکی متمرکز شده است و به سرعت میرا می‌شوند. از طرف دیگر تبدیل فوریه فقط دقت در فرکانس دارد. یعنی تمام فرکانس های موجود در یک سیگنال را می‌تواند تعیین کند، ولی سیگنال ها ویژگی‌هایی دارند که با زمان تغییر می‌کند و با تبدیل فوریه نمی‌توان این مشخصات را آشکار سازی کرد [۱۹].

تبدیل فوریه، برای غلبه بر این مشکل، پنجره‌ای را معرفی می‌کند که سیگنال را به یک فضای دو بعدی زمان - فرکانس تصویر می‌کند. ایراد این روش نیز این است که هنگامی که پنجره‌ای با طول مشخص انتخاب می‌شود، این پنجره برای تمام فرکانس‌ها یکسان می‌باشد. بهتر است که طول پنجره به منظور بدست آوردن اطلاعات دقیق زمانی و مکانی تغییر کند.

آنالیز موجک تکنیکی مبتنی بر ایجاد پنجره‌های متغیر می‌باشد. به طوری که در جاهایی که اطلاعات با فرکانس پایین نیاز است از پنجره های با طول بلند و در جاهایی که اطلاعات فرکانس بالا نیاز است از پنجره های کوتاه استفاده می‌شود. حسن استفاده از آنالیز موجک این است که نیاز به هیچ نوع پیش فرضی برای بخش سیگنال سری زمانی وجود ندارد. یعنی به نحوی اثر نقص مدل سیستماتیک در آنالیز سری‌های زمانی GPS کم رنگ خواهد بود.

از مهمترین و وسیع ترین تحقیقات انجام شده از کاربرد موجک در علوم ژئودزی و ژئوفیزیک می‌توان به

۱ Offset  
۲ White noise  
۳ Flicker noise  
۴ Random walk noise

۵ Wavelet

کمترین مربعات وزن دار (با معلوم بودن ماتریس کوواریانس مشاهدات  $Q_y$ ) داشت.

آنالیز نویزها در سری های زمانی معمولاً از دو روش انجام می گیرد:

۱. طیف توان نویز و برآورد شیب آن: رفتار مکانی یا زمانی یک بعدی از یک فرآیند تصادفی دارای طیف توان به صورت زیر می باشد:

$$P(f) = P_0 \left(\frac{f}{f_0}\right)^\kappa \quad (2)$$

که در آن  $f$  فرکانس،  $P_0$  و  $f_0$  ثابت های نرمال ساز و  $\kappa$  شاخص طیفی می باشد. در صورتی که  $\kappa \in [-3, 1]$  حرکت براونی کسری<sup>۲</sup>، اگر  $\kappa \in [-1, 1]$  نویز سفید کسری<sup>۴</sup>، اگر  $\kappa = 0$  نویز سفید، اگر  $\kappa = -1$  نویز فلیکر و اگر  $\kappa = -2$  نویز تصادفی خواهد بود [۱].

۲. تشکیل مدل استوکاستیک بین المانهای تشکیل دهنده ماتریس مشاهدات و برآورد دامنه هر کدام از آنها: در این روش برای مشخص کردن سهم هر کدام از نویز های رنگی در ماتریس کوواریانس، از روش تجزیه ماتریس کوواریانس استفاده می شود:

$$Q_y = \sigma_w^2 I + \sigma_f^2 Q_f + \sigma_{rw}^2 Q_{rw} \quad (3)$$

در رابطه فوق ضرائب  $\sigma_w$ ،  $\sigma_f$  و  $\sigma_{rw}$  به ترتیب دامنه نویز تصادفی، نویز فلیکر و نویز سفید بوده، ماتریس  $I$  ماتریس یکه بوده و ماتریس های  $Q_{rw}$  ماتریس کوفاکتور نویز تصادفی و  $Q_f$  ماتریس کوفاکتور نویز فلیکر می باشند. ساختار کلی ماتریس  $Q_y$  معلوم می باشد ولی سهم هر کدام از نویز های رنگی مجهول می باشد که می تواند توسط روش های برآورد درست نمائی ماکزیمم یا کمترین مربعات مولفه های واریانس برآورد شود [۲].

بر اساس محاسبات انجام گرفته بهترین ترکیب نویزی برای داده های GPS شامل ترکیب نویز سفید و فلیکر می باشد [۹، ۳۱، ۳۴]. این در حالی است که تحقیقاتی دیگر وجود نویز تصادفی را در ۳۰٪ داده ها تایید می کنند [۱۸، ۲۰، ۳۱، ۳۴].

کتابهای تالیف شده توسط آقایان کِلِر [۳] و فریدن اشاره کرد [۱۶، ۱۷].

در این مقاله ابتدا آنالیز طیفی کمترین مربعات سیگنالهای GPS (آنالیز فوریه) و روشهای برآورد انواع نویز در سری های زمانی GPS مرور می شود و در ادامه تجزیه سیگنال به باندهای فرکانسی مختلف در فضای موجک بحث می شود. در بخش چهارم از این تحقیق روشهای آستانه گذاری و بازسازی سیگنال مورد بحث قرار می گیرد. به منظور بررسی کارائی تئوری مورد بحث در این پژوهش، به تعداد ۲۶۴ ایستگاه دائمی GPS از آرشیو 'SOPAC' با پوشش زمانی ۱۰ ساله (از ژانویه ۲۰۰۱ تا ژانویه ۲۰۱۱) جهت انجام آنالیز و محاسبات انتخاب گردیده است.

## ۲- آنالیز طیفی کمترین مربعات سیگنالهای GPS (آنالیز فوریه)

در روش آنالیز طیفی کمترین مربعات، سری زمانی موقعیت ایستگاههای دائمی به مولفه های پررودیک با فرکانسهای مختلف تجزیه شده و مورد تحلیل قرار می گیرند [۲۶]:

$$y(t_i) = a + b(t_i - t_0) + c \sin(2\pi t_i) + d \cos(2\pi t_i) + e \sin(4\pi t_i) + f \cos(4\pi t_i) + \sum_{j=1}^{n_g} g_j H(t_i - T_{g_j}) + v_i \quad (1)$$

که در آن  $t_0$  لحظه شروع سری زمانی (مبداء زمانی)،  $t_i$  زمان هر اپک مشاهداتی،  $(a, b)$  ضرائب روند خطی سری زمانی،  $(c, d)$  ضرائب حرکت دوره سالیانه،  $(e, f)$  ضرائب حرکت دوره نیم سالیانه و پارامتر  $g_i$  آفستها (جابجایی های ناشی از تغییر آنتن) را برای هر تعداد  $n_g$  با اندازه و بزرگی های  $g$  در اپک  $T_g$  بیان می کند. در رابطه فوق  $H$  تابع پله ای هویساید<sup>۲</sup> می باشد و  $v_i$  نویز مشاهدات (مربوط به هر ایستگاه) بوده که دارای رفتاری تصادفی است ( $E(v) = 0$ ). با فرض معلوم بودن مشاهدات  $y$  در اپکهای مشاهداتی مختلف  $t_i$ ، می توان برآوردی خطی نا اریب از پارامترهای مجهول توسط متد

۳ Fractional Brownian motion  
۴ Fractional white noise

۱ Scripts orbit and permanent array center  
۲ Heaviside step function

### ۳- تجزیه سیگنال به باندهای فرکانسی مختلف در فضای موجک

هدف از تبدیل موجک، انتقال سیگنال از فضای زمان به فضای مشترک زمان- فرکانس می باشد. در تبدیل موجک پیوسته، سیگنال  $f(t)$  را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(t) f(t) dt \quad (4)$$

که در آن  $\psi_{a,b}(t)$  تابع موجک مادر<sup>۱</sup> می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (5)$$

$a$  پارامتر مقیاس و  $b$  نیز پارامتر انتقال روی محور مختصات می باشد. افزایش پارامتر مقیاس باعث پهن شدن موجک مادر در حوزه زمان می گردد و محتوای فرکانسی پایین را نشان می دهد و برعکس [۱۹].

بدلیل حجم محاسبات زیاد در تبدیل موجک پیوسته، مبانی الگوریتم سریع موجک گسسته با استفاده از مبانی آنالیز چند ریزه سازی<sup>۲</sup> (MRA) در سال ۱۹۸۷ پایه ریزی شد [۲۱]. این تئوری بر مبانی امکان استفاده از توابع پایه مختلف از نوع موجک برای تقسیم محتوای فرکانسی سیگنال به چندین سیگنال ساده می باشد. برای تشریح این تئوری فرض می شود که فضای  $L^2(\mathbb{R})$  شامل تمامی توابع مربعی انتگرال پذیر باشد و MRA شامل دنباله ای از زیر فضاهای تو در تو  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  باشد که می توانند فضای  $L^2(\mathbb{R})$  را تقریب بزنند. زیر فضاها دارای خواص زیر می باشند:

۱. کامل بودن<sup>۳</sup>: اجتماع زیر فضاهای تو در تو چگال در  $L^2(\mathbb{R})$  بوده و اشتراک آنها با هم تهی می باشد:

$$\{o\} \subset \dots \subset V_o \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R}) \quad (6)$$

۲. قاعده مندی<sup>۴</sup>: توابع مولد زیر فضای  $V_o \subset L^2(\mathbb{R})$  توابعی متعامد معروف به توابع مقیاس  $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  می باشند.

۳. خود متشابه<sup>۵</sup> در حوزه زمان- مکان: هر زیر فضای مانند  $V_k$  تحت ترانسفورماسیونی از مضارب صحیح از  $2^{-k}$  ناوردا خواهد بود. به عبارتی به ازای هر  $f \in V_k$  وجود دارد  $g \in V_l$  به طوری که:

$$\forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}: f(x) = g(x + m2^{-k}) \quad (7)$$

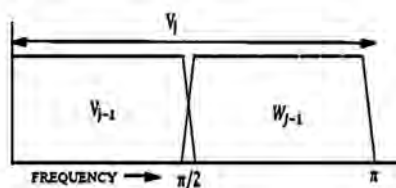
۴. خود متشابه در حوزه مقیاس- فرکانس: تمامی زیر فضاهای  $V_k \subset V_l, k < l$  در واقع یک نسخه ای از تبدیل زمانی همدیگر با مقیاس  $2^{l-k}$  می باشند. به عبارتی به ازای هر  $f \in V_k$  وجود دارد  $g \in V_l$  به طوری که:

$$\forall x \in \mathbb{R}: g(x) = f(2^{l-k}x) \quad (8)$$

اگر زیر فضای  $V_j$  (که حاوی رفتار تقریبی سیگنال بوده و زیر فضای تقریبات می باشد) توسط بردارهای پایه  $\phi_{j,k}(x)$  تنیده شود، آنگاه  $V_{j+1}$  توسط بردارهای پایه  $\phi_{j+1,k}(x) = \sqrt{2}\phi_{j,k}(2x)$  تنیده می شود بطوریکه  $\phi_{j+1,k}(x) = \sqrt{2}\phi_{j,k}(2x)$  بدلیل اینکه  $V_o \subset V_1$  می باشد، هر تابعی در  $V_o$  را می توان به صورت ترکیب خطی از توابع پایه  $\sqrt{2}\phi(2x-k)$  از  $V_1$  نوشت:

$$\phi(x) = \sum_k h(k) \sqrt{2}\phi(2x-k) \quad (9)$$

که در آن  $h(k) = \langle \phi(x), \sqrt{2}\phi(2x-k) \rangle$  متعمد متعامد از  $V_j$  به  $V_{j+1}$  را با  $W_j$  نمایش می دهیم که در آن  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  و حاوی رفتار فرکانس بالای سیگنال بوده و زیر فضای جزئیات می باشد (شکل ۱).

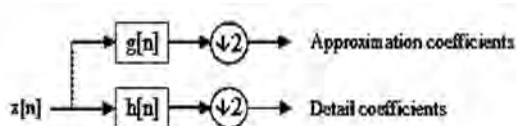


شکل ۱- تقسیم محتوای فرکانسی سیگنال

۴ Regularity  
۵ Self - similarity

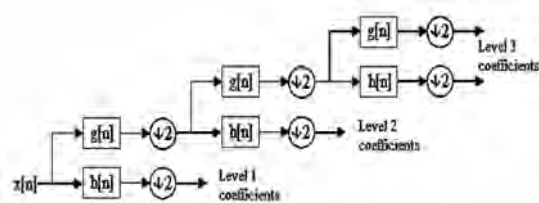
۱ Mother wavelet  
۲ Multi-resolution analysis  
۳ Completeness

بالاگذر (فرکانس بالا) و باند دوم ( $s$ ) شامل ضرائب کلیات<sup>۳</sup> ناشی از عبور از فیلتر پایین گذر (فرکانس پایین) می باشد (شکل ۲). از آنجا که پس از عبور از هر فیلتر نیمی از فرکانس های سیگنال حذف می شوند، بنابراین خروجی فیلترها با ضرب دو باز نمونه برداری<sup>۴</sup> می شوند [۱۹].



شکل ۲- دیاگرام بلوکی از آنالیز فیلتری

این فیلترها، فیلترهای آینه ای چهارگانه<sup>۵</sup> می باشند. روند تجزیه سیگنال به دو باند  $d$  و  $s$ ، وابسته به تعداد نقاط سیگنال بوده و می تواند به صورت سلسله وار بر روی باند حاوی ضرائب فرکانس بالا ادامه داشته باشد تا اینکه رزولوشن فرکانسی مورد نظر حاصل گردد (شکل ۳).



شکل ۳- تراز سوم از تجزیه یک سیگنال به فرکانسهای بالا و پایین

#### ۴- روش های آستانه گذاری

آستانه گذاری<sup>۶</sup>، یک روش غیر خطی است که بر روی ضرائب موجک عمل می کند. یکی از روشهای رایج فیلتر کردن نویز گوسی (با میانگین صفر و انحراف معیار  $\sigma$ ) از طریق آستانه گیری ضرائب موجک می باشد. در این روش، پس از انتقال سیگنال به فضای موجک، چندین مجموعه ضرائب بدست می آید که هر مجموعه مربوط به یک محدوده فرکانسی خاص می باشند. هر کدام از ضرائب موجک با یک آستانه مقایسه می شوند که اگر قدر مطلق آن کمتر از آستانه باشند، صفر می گردد و در غیر اینصورت، براساس قانون آستانه گیری بکار رفته، نگه داشته می شوند یا تغییر می یابند. در حقیقت نقش آستانه این است که ضرائب کوچک را که

حال با تعریف بردارهای پایه زیر:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_k \sqrt{2} (-1)^n h(-k+1) \phi(2x-k) \\ &= \sum_k \sqrt{2} g(k) \phi(2x-k) \end{aligned} \quad (10)$$

می توان نشان داد که  $\{\sqrt{2}\psi(2x-k), k \in \mathbb{Z}\}$  یک پایه متعامد برای  $W_1$  می باشد [۱۱]. از خاصیت خود متشابهی MRA می توان نتیجه گرفت که  $W_1$  مولد  $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k); j, k \in \mathbb{Z}\}$  می باشد. بدلیل اینکه  $U_{j \in \mathbb{Z}} \in V_j = U_{j \in \mathbb{Z}} \in W_j$  چگال در  $L^2(\mathbb{R})$  می باشد، پس:

$$\{\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k); j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (11)$$

بردارهای پایه  $L^2(\mathbb{R})$  می باشند. بنابراین، برای هر تابع  $f \in L^2(\mathbb{R})$  می توان فرمول تجزیه<sup>۱</sup> را بصورت زیر نوشت [۲۱]:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k s_j(k) 2^{j/2} \varphi(2^j - k) \\ &+ \sum_k d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j - k) \end{aligned} \quad (12)$$

که در رابطه فوق ضرائب  $s_j$  و  $d_j$  به ترتیب مختصات تصویر این تابع بر زیر فضای تقریبات و جزئیات می باشد. الگوریتم سریع ملات برای تجزیه سیگنال  $x$  با عبور آن از یک مجموعه از فیلترها محاسبه می گردد. برای این امر ابتدا سیگنال گسسته مورد نظر از یک فیلتر پایین گذر با پاسخ ضربه  $g$  عبور داده می شود (با استفاده از کانولوشن سیگنال و پاسخ ضربه فیلتر):

$$d(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2n-k)x(k) \quad (13)$$

همزمان، سیگنال توسط فیلتر بالا گذر  $h$  نیز تجزیه می گردد:

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(2n-k)x(k) \quad (14)$$

در نتیجه این امر دو باند خروجی حاصل می گردد. باند اول، ( $d$ ) شامل ضرائب جزئیات<sup>۲</sup> ناشی از عبور فیلتر

<sup>۳</sup> Approximation coefficients

<sup>۴</sup> Down sampling

<sup>۵</sup> Quadrature mirror filter

<sup>۶</sup> Thresholding

<sup>۱</sup> Decomposition formula

<sup>۲</sup> Detailed coefficients

جزئیات در سطح اول تجزیه ( $d_1$ ) برای برآورد مقدار  $\sigma$  به صورت زیر استفاده کردند:

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median}(|d_1(k) - \text{median}(d_1(k))|)}{0.6745} \quad (18)$$

که در آن  $n$  طول سیگنال و  $k=1,2,\dots,n/2$  می باشد. دلیل این انتخاب ضرائب جزئیات از سطح اول تجزیه آنست که این سطح از ضرائب بیشتر به نویز آلوده می باشند. روشهای استاندارد از انتخاب سطح آستانه مورد بحث قرار می گیرند:

الف) حد آستانه سراسری<sup>۶</sup>: بدون در نظر گرفتن تابع آستانه، برای یک سیگنال به طول  $n$  و حاوی نویز سفید گوسی با توزیع مستقل و همسان  $x \sim N(0,1)$  سطح آستانه از رابطه زیر قابل حصول می باشد [۱۳]:

$$\lambda^U = \sqrt{2 \log n} \quad (19)$$

در صورتی که داده ها نسبت به انحراف استاندارد نویز نرمالیزه نشده باشند، مقدار  $\hat{\sigma}$  توسط معادله (۱۷) برآورد شده و حد آستانه از رابطه  $\lambda^U = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log n}$  برآورد می گردد.

ب) حد آستانه شورشرینک<sup>۷</sup>: حد آستانه در این روش وابسته به هر سطح تجزیه می باشد و با کمینه کردن برآورد ناریب ریسک اشتاین<sup>۸</sup> در هر سطح تجزیه  $j$  بدست می آید [۱۳]:

$$\lambda_j^S = \arg \min_{\lambda \geq 0} [\text{SURE}^S(\lambda, d_j)] \quad (20)$$

که در آن  $\text{SURE}^S(\lambda, d_j)$  نمایانگر برآورد ناریب ریسک از تابع آستانه مربوطه و  $d_j$  ضرائب جزئیات در سطح تجزیه  $j$  می باشد. به عنوان مثال، حد آستانه در این سطح از تابع آستانه نرم عبارت است از:

$$\text{SURE}^S(\lambda, d_j) = N_j - 2 \sum_{k=1}^{N_j} 1(|d_k| \leq \lambda) + \sum_{k=1}^{N_j} (\min(|d_k|, \lambda))^2 \quad (21)$$

آلوده به نویز می باشند را از ضرائب بزرگ، که نشان دهنده ویژگی های مهم سیگنال می باشند، متمایز می سازد [۲۹].

فرآیند آستانه گذاری ضرائب جزئیات موجب به دو مرحله قابل تقسیم می باشد که مرحله اول آن انتخاب تابع آستانه  $T$  می باشد. در واقع، توابع آستانه نمایانگر چگونگی اعمال حد آستانه به ضرائب می باشد. دو تابع کلی برای این مرحله تعریف شده است: تابع آستانه سخت<sup>۱</sup>  $\delta_\lambda^H$  و تابع آستانه نرم<sup>۲</sup>  $\delta_\lambda^S$ . در تابع آستانه سخت، زیر باندی از ضرائب جزئیات ( $d$ ) با مقادیر بزرگتر از سطح آستانه ( $\lambda$ ) حفظ می شوند:

$$\delta_\lambda^H(d) = d \mathbf{1}(|d| > \lambda) \quad (15)$$

در حالی که در تابع آستانه نرم داریم:

$$\delta_\lambda^S(d) = (d - \text{sgn}(d)\lambda) \mathbf{1}(|d| > \lambda) \quad (16)$$

که  $\mathbf{1}$  تابع مشخصه<sup>۳</sup>  $\lambda$  در  $d$  می باشد [۱۰] و بصورت زیر تعریف می شود:

$$1_\lambda(d) = \begin{cases} 1; & |d| > \lambda \\ 0; & |d| \leq \lambda \end{cases} \quad (17)$$

مرحله دوم، انتخاب حد آستانه می باشد. روشهای آستانه گذاری به دو گروه تقسیم می شوند: آستانه گذاری سراسری و آستانه گذاری وابسته به سطح. در روش اول، مقداری واحد برای آستانه گذاری تمامی ضرائب موجب انتخاب می شود در حالی که در روش دوم امکان آستانه گذاری برای هر سطح تجزیه ( $j$ ) از ضرائب ( $\lambda_j$ ) ممکن می باشد. لازمه انتخاب سطح آستانه، بر آورد سطح نویز ( $\sigma$ ) می باشد. روش معمول در تعیین آن محاسبه انحراف استاندارد داده های سیگنال می باشد که به عنوان برآوردگر مناسبی در نظر گرفته نمی شود. با فرض اینکه سیگنال حاوی نویز سفید گوسی با توزیع مستقل و همسان  $N(0, \sigma)$  می باشد، دونوو و جانسون [۱۵] از تخمینگر باثبات<sup>۴</sup>، نظیر انحراف مطلق میانه<sup>۵</sup>، از ضرائب

<sup>۱</sup> Hard threshold

<sup>۲</sup> Soft threshold

<sup>۳</sup> Indicator function

<sup>۴</sup> Robust estimator

<sup>۵</sup> Median absolute deviation

<sup>۶</sup> Universal thresholding

<sup>۷</sup> SureShrink thresholding

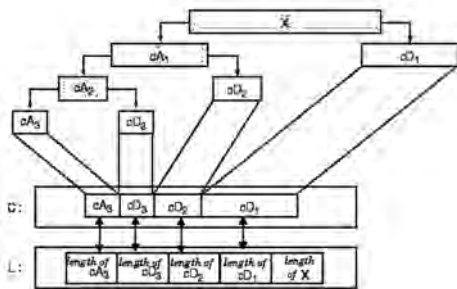
<sup>۸</sup> Stein's unbiased risk estimate (SURE)

که در آن،  $\alpha > 1$  پارامتر تنظیم میزان پراکندگی<sup>۴</sup> ضرائب و  $t = 1, 2, \dots, n$  می باشد.

ه) حد آستانه با استفاده از راهکار بیرگه-ماسارت<sup>۵</sup>: در این روش نیز حد آستانه وابسته به سطح تجزیه می باشد. بر اساس استراتژی بیرگه ماسارت [۴]، فرض می کنیم  $j$  سطح تجزیه مطلوب باشد و  $m > 1$  طول بردار ضرائب تقریب آخرین سطح تجزیه  $l(1)$  می باشد  $\alpha > 1$  پارامتر تنظیم میزان پراکندگی می باشد. در واقع هر سه پارامتر  $j$ ،  $m$  و  $\alpha$  مشخص کننده استراتژی می باشند: (۱) در سطح تجزیه  $j+1$  فرض می شود که تمامی ضرائب حفظ می شوند، (۲) برای سطح تجزیه  $i$  ام، ضرائبی که اندازه آنها بزرگتر از مقدار زیر نباشند، صفر قرار داده می شوند:

$$n_j = \frac{m}{(j+2-i)^\alpha} \quad (25)$$

همانطوری که از فرمول فوق پیداست، برای سطح تجزیه  $i = j+1$  مقدار  $n_{j+1} = m = l(1)$  می باشد. بردار  $l$  بیانگر تعداد ضرائب سطوح تجزیه می باشد که در شکل زیر نحوه بدست آوردن آن بیان شده است:



شکل ۴- نمایش نحوه ذخیره اعضاء تجزیه داخل بردار  $l$

## ۵- باز سازی سیگنال

برای بازسازی سیگنال، سیگنال از پایین ترین سطح تجزیه دوباره ترکیب شده و این کار بطور متناوب انجام می گیرد تا سیگنال اصلی حاصل گردد (مراحل ترکیب به صورت عکس مراحل تجزیه انجام می گیرد). یعنی زیر باندهائی که در آخرین مرحله تجزیه حاصل گردیده است، باید در اولین مرحله با هم ترکیب گردند. شکل ۵، سیگنال بازسازی شده را پس از دو مرحله تجزیه و حذف ضرائب جزئیات و سپس ترکیب مجدد نشان می دهد.

که  $N_j$  تعداد ضرائب تجزیه موجک و  $\lambda_j^S$  مقدار حد آستانه مطلوب می باشد. در روابط فوق، فرض بر این است که  $\sigma = 1$  می باشد. در صورتی که واریانس داده ها واحد نباشد، مقدار  $\hat{\sigma}_j$  مربوط به هر سطح تجزیه را از رابطه (۱۷) محاسبه کرده و ضرائب جزئیات هر کدام از سطوح تجزیه را ( $d_j$ ) توسط  $\hat{\sigma}_j$  استاندارد کرده و سپس مقدار حد آستانه را برای ضرائب استاندارد شده هر سطح محاسبه می کنیم [۱۹]. دونوهو و جانسون [۱۳] نشان دادند که در حالتی که ضرائب موجک کم پشت<sup>۱</sup> باشند (میزان سیگنال به نویز ضرائب پایین باشد)، ترکیب حد آستانه های سراسری و SURE حد آستانه بهینه می باشد. این روش هیبریدی، زمانی که با یک تابع آستانه نرم ترکیب شود روش شورشرینک نامیده می شود. در صورتی که نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\frac{1}{N_j} \sum_{j=1}^{N_j} \left( \left( \frac{d_j}{\hat{\sigma}} \right)^2 - 1 \right) \leq \frac{(\log_2 N_j)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{N_j}} \quad (22)$$

از حد آستانه سراسری استفاده می کند و در غیر اینصورت از آستانه SURE برای ضرائب در سطح تجزیه  $j$  استفاده می کند.

ج) حد آستانه مینیماکس<sup>۲</sup>: این روش یکی از عمومی ترین روشهای آستانه گذاری می باشد. آستانه گذاری مینیماکس بر اساس مینیم کردن تابع زیر می باشد [۱۴]:

$$\inf_{\lambda} \sup_{\theta} \left\{ \frac{R_{\lambda}(\theta)}{n^{-1} + \min(\theta^2, 1)} \right\} \quad (23)$$

که در آن  $R_{\lambda}(\theta) = E(\delta_{\lambda}(d) - \theta)^2$ ،  $d \sim N(\theta, 1)$  حد آستانه جریمه<sup>۳</sup>: حد آستانه در این روش وابسته به هر سطح تجزیه می باشد. در این روش، ضرائب جزئیات ( $d_j$ ) در هر سطح تجزیه بصورت نزولی مرتب می شوند و طبق رابطه زیر حد آستانه برای هر سطح تجزیه از ضرائب، محاسبه می شود [۵]:

$$\lambda = \arg \min_t \left[ -\sum_{k=1}^t d_k^2 + 2 \sigma^2 t \left( \alpha + \ln \frac{n}{t} \right) \right] \quad (24)$$

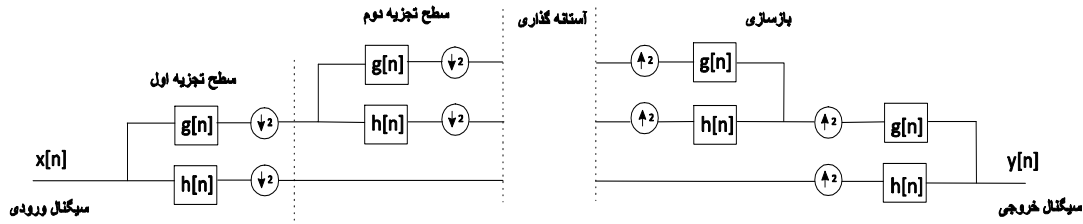
<sup>۱</sup> Sparse

<sup>۲</sup> Minimax thresholding

<sup>۳</sup> Penalized thresholding

<sup>۴</sup> Sparsity parameter

<sup>۵</sup> Birgé- Massart strategy



شکل ۵- نمایش سیگنال باز سازی شده توسط فیلتر های آینه ای چهار گانه

## ۶- آنالیز عددی

نویز سفید بر آورد شده پس از آستانه گذاری با استفاده از روش هیبریدی شور شرینگ، ردیف پنجم مربوط به توزیع نویز سفید بر آورد شده پس از آستانه گذاری - گذاری با استفاده از روش آستانه گذاری سراسری، ردیف ششم مربوط به توزیع نویز سفید بر آورد شده پس از آستانه گذاری با استفاده از روش مینیماکس و ردیف هفتم مربوط به توزیع نویز سفید بر آورد شده پس از آستانه گذاری با استفاده از کمینه کردن برآورد ناریب ریسک اشتاین می باشد.

نتایج حاصل از شکل ۷ نشان می دهد که مقادیر نویز سفید (مدل I) برای مولفه قائم بیش از مولفه های مسطحاتی است. با مقایسه انواع روشهای آستانه گذاری مشخص می شود که میزان نویز هنگام استفاده از روشهای آستانه گذاری سراسری و راهکار بیرگه - ماسارت (در مولفه قائم)، هم برای دامنه های کوچک و بزرگ، کاهش چشمگیر یافته است. در صورتی که این کاهش برای روش آستانه گذاری مینیماکس و روش هیبریدی شور شرینگ فقط برای دامنه های بزرگتر دیده می شود. توزیع نویز سفید بر آورد شده پس از اعمال حد آستانه جریمه نشان دهنده آنست که در حالت کلی فراوانی دامنه های کوچکتر کمتر شده و بر فراوانی دامنه های بزرگتر افزوده شده است. برای روش آستانه گذاری مینیماکس و روش هیبریدی شور شرینگ فقط برای دامنه های بزرگتر دیده می شود. توزیع نویز سفید بر آورد شده پس از اعمال حد آستانه جریمه نشان دهنده آنست که در حالت کلی فراوانی دامنه های کوچکتر کمتر شده و بر فراوانی دامنه های بزرگتر افزوده شده است.

شکل ۸ نمایشگر برآورد نویز سفید در مدل ترکیبی نویز سفید بعلاوه نویز تصادفی (مدل II) بوده و شکل ۹ نمایشی از برآورد نویز سفید در مدل ترکیبی نویز سفید بعلاوه فلیکر (مدل III) می باشد.

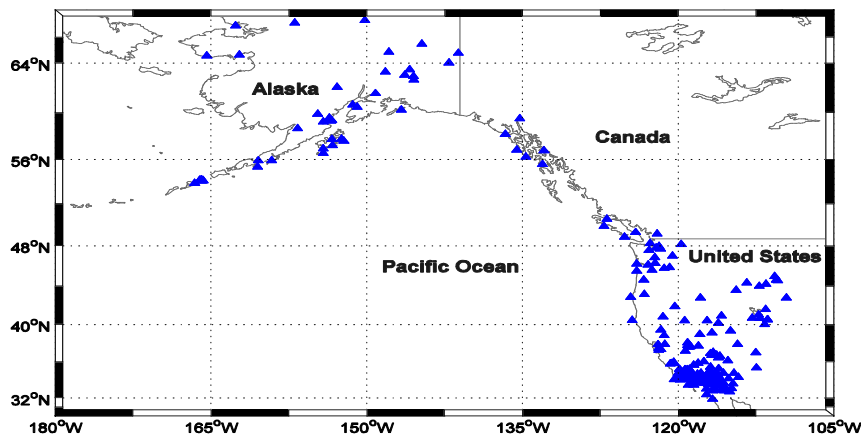
برای بررسی عملی روشهای آستانه گذاری و مقایسه بین آنها، به تعداد ۲۶۴ ایستگاه دائمی GPS از آرشیو SOPAC با پوشش زمانی ۱۰ ساله (از ژانویه ۲۰۰۱ تا ژانویه ۲۰۱۱) جهت انجام آنالیز و محاسبات انتخاب گردید. این داده ها بصورت خام بوده و هیچ گونه عملیات نویز بری روی آنها انجام نگرفته بود. شکل ۶ موقعیت ایستگاه های دائمی GPS انتخابی را نمایش می دهد. برای سنجش میزان نویز در سری های زمانی ایستگاه های دائمی GPS و میزان اثر بخشی روشهای آستانه گذاری در کاهش نویزها، از سه مدل استوکاستیک برای توصیف مشخصات نویزی در سری های زمانی ایستگاه های دائمی GPS استفاده می شود:

الف) مدل شامل نویز سفید (مدل I)، ب) مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز تصادفی (مدل II)، ج) مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز فلیکر (مدل III)، شکل ۷ نمایش قطبی از فراوانی (هیستوگرام زاویه ای) نویز سفید در ایستگاه های دائمی GPS از سه مولفه (East, North, Up) می باشد که در آن هر قطاع متناسب با مساحت خود معرف فراوانی نسبی در جدول فراوانی می باشد. داده ها (دامنه نویزهای برآورد شده از نویز سفید توسط روش درست نمائی ماکزیمم) به رادیان تبدیل شده، شعاع هر قطاع نمایش دهنده فراوانی مطلق هر دسته بوده و اندازه زاویه مرکزی هر قطاع نشان دهنده دامنه تغییرات داده ها در آن دسته می باشد.

ردیف اول از این گراف مربوط به توزیع نویز سفید در مولفه های قائم<sup>۱</sup> و مسطحاتی<sup>۲</sup> از داده های خام<sup>۳</sup> می باشد، ردیف دوم مربوط به توزیع نویز سفید بر آورد شده پس از اعمال حد آستانه جریمه، ردیف سوم مربوط به توزیع نویز سفید بر آورد شده پس از آستانه گذاری با استفاده از راهکار بیرگه - ماسارت، ردیف چهارم مربوط به توزیع

۱ Up components  
۲ East and north components  
۳ Raw data





شکل ۶- موقعیت ایستگاه های دائمی GPS انتخابی از آرشیو SOPAC با پوشش زمانی ۱۰ ساله (از ژانویه ۲۰۰۱ تا ژانویه ۲۰۱۱)

الف) مدل شامل نویز سفید (مدل I)، ب) مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز تصادفی (مدل II)، ج) مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز فلیکر (مدل III)، بر روی داده های ۲۶۴ ایستگاه دائمی GPS استفاده شد.

نتایج حاصل نشان می دهد که از بین روشهای آستانه گذاری که شامل: حد آستانه جریمه، راهکار بیرگه - ماسارت، روش هیبریدی شور شرینگ، روش آستانه گذاری سراسری، روش مینیماکس، روش آستانه گذاری با استفاده از کمینه کردن برآورد نارایب ریسک اشتاین بودند، در مدل شامل نویز سفید (مدل I): روش حد آستانه جریمه و روش آستانه گذاری با استفاده از کمینه کردن برآورد نارایب ریسک اشتاین قادر به کاهش فراوانی دامنه های کوچکتر می باشند، در صورتی که روشهای مینیماکس و هیبریدی شور شرینگ قادر به کاهش فراوانی دامنه های بزرگتر از نویز سفید را دارند. راهکار بیرگه - ماسارت و روش آستانه گذاری سراسری هم قادر به کاهش فراوانی دامنه های کوچکتر و هم کاهش فراوانی دامنه های بزرگتر می باشند.

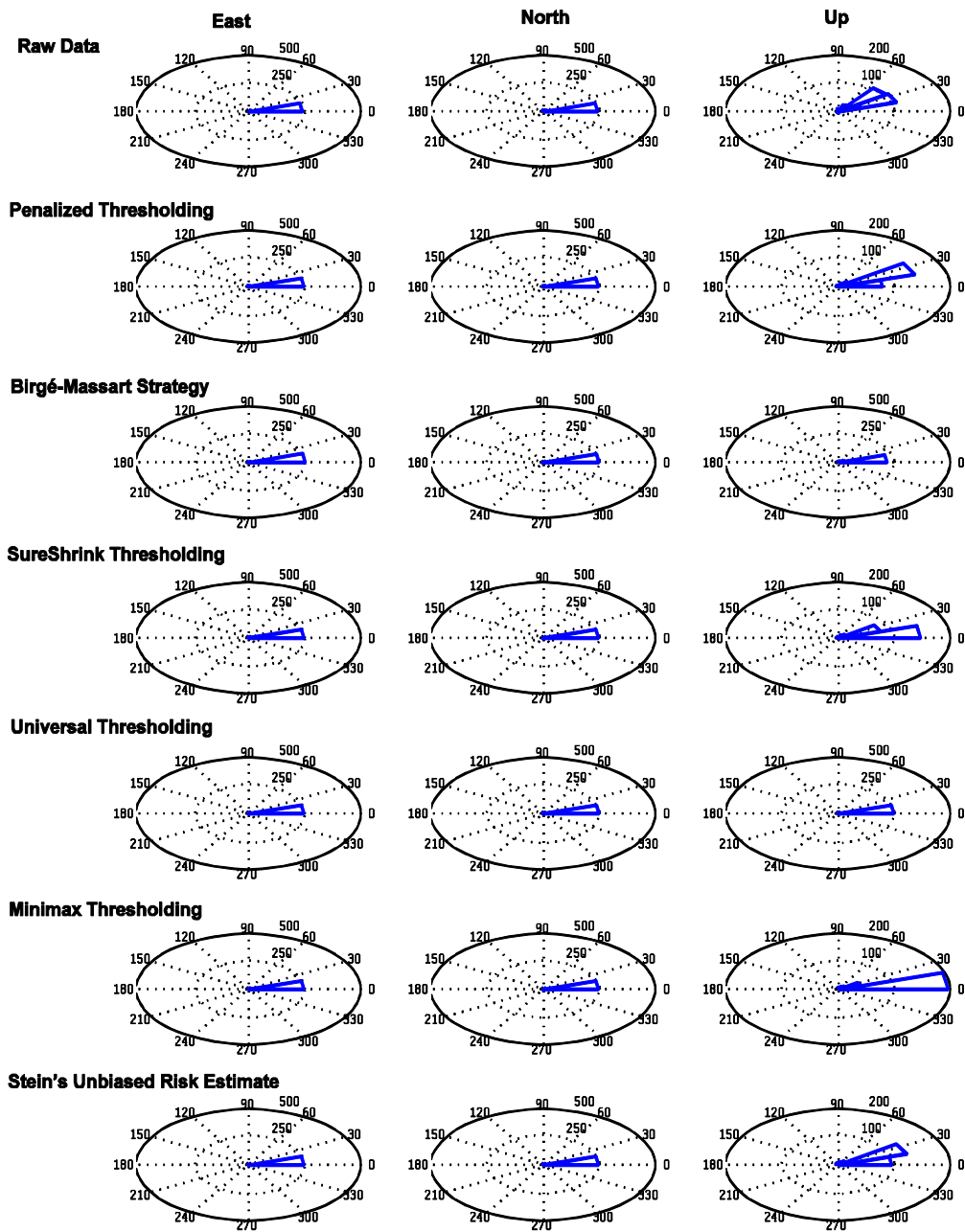
در مدل ترکیبی شامل نویز سفید و نویز تصادفی (مدل II) و مدل ترکیبی شامل نویز سفید و فلیکر نویز (مدل III)، تمامی روشها قادر به کاهش فراوانی دامنه های کوچکتر و بزرگتر از نویز سفید (در هر دو مدل) به یک میزان هستند. این در حالی است که برای نویز تصادفی و نویز فلیکر (به ترتیب) روش حد آستانه جریمه و روش آستانه گذاری با استفاده از کمینه کردن برآورد نارایب ریسک اشتاین قادر به کاهش فراوانی دامنه های کوچکتر می باشند، در صورتی که روشهای مینیماکس و هیبریدی شور شرینگ قادر به کاهش فراوانی دامنه های بزرگتر از نویز رنگی را دارند. راهکار بیرگه - ماسارت و روش آستانه گذاری سراسری قادر به کاهش فراوانی دامنه های کوچکتر و بزرگتر از نویز رنگی می باشند.

همانطوری که دیده می شود تمامی روشهای آستانه گذاری قادر به کاهش این نویز به یک اندازه می باشند و تفاوتی در استفاده از روشهای آستانه گذاری دیده نمی شود. با مقایسه اشکال ۷ و ۸ و ۹ در مولفه قائم (برای داده های خام) مشخص می شود که در صورتی که مدل استوکاستیک فقط شامل نویز سفید باشد، فراوانی نویز سفید در دامنه های کوچک و بزرگ یکسان می باشد. در مدل II مقدار و همچنین فراوانی این نویز، برای دامنه های کوچک کمتر و برای دامنه های بزرگتر ماکزیمم می شود. در مدل III نتایج حاصل بیانگر اینست که فراوانی و مقدار این نویز برای دامنه های بزرگتر، کاهش می یابد و برای دامنه های کوچکتر افزایش می یابد.

شکل ۱۰ نمایشگر برآورد نویز تصادفی را در مدل (II) نشان می دهد. با مقایسه انواع روشهای آستانه گذاری مشخص می شود که میزان نویز هنگام استفاده از روشهای آستانه گذاری سراسری و راهکار بیرگه - ماسارت (در مولفه قائم)، هم برای دامنه های کوچک و بزرگ، کاهش چشمگیر یافته است. مقایسه شکل ۷ و ۱۰ نشان می دهد که فراوانی و مقدار برآورد شده برای نویز سفید در مدل (I) با فراوانی و مقدار برآورد شده برای نویز تصادفی در مدل (II) بسیار شبیه هم می باشد. شکل ۱۱ نمایشگر برآورد نویز فلیکر را در مدل (III) نشان می دهد. در این نوع نویز نیز با اعمال روشهای آستانه گذاری سراسری و راهکار بیرگه - ماسارت (در مولفه قائم)، هم برای دامنه های کوچک و بزرگ، کاهش چشمگیر یافته است ولی بقیه روشهای آستانه گذاری توانایی کاهش این نویز را ندارند.

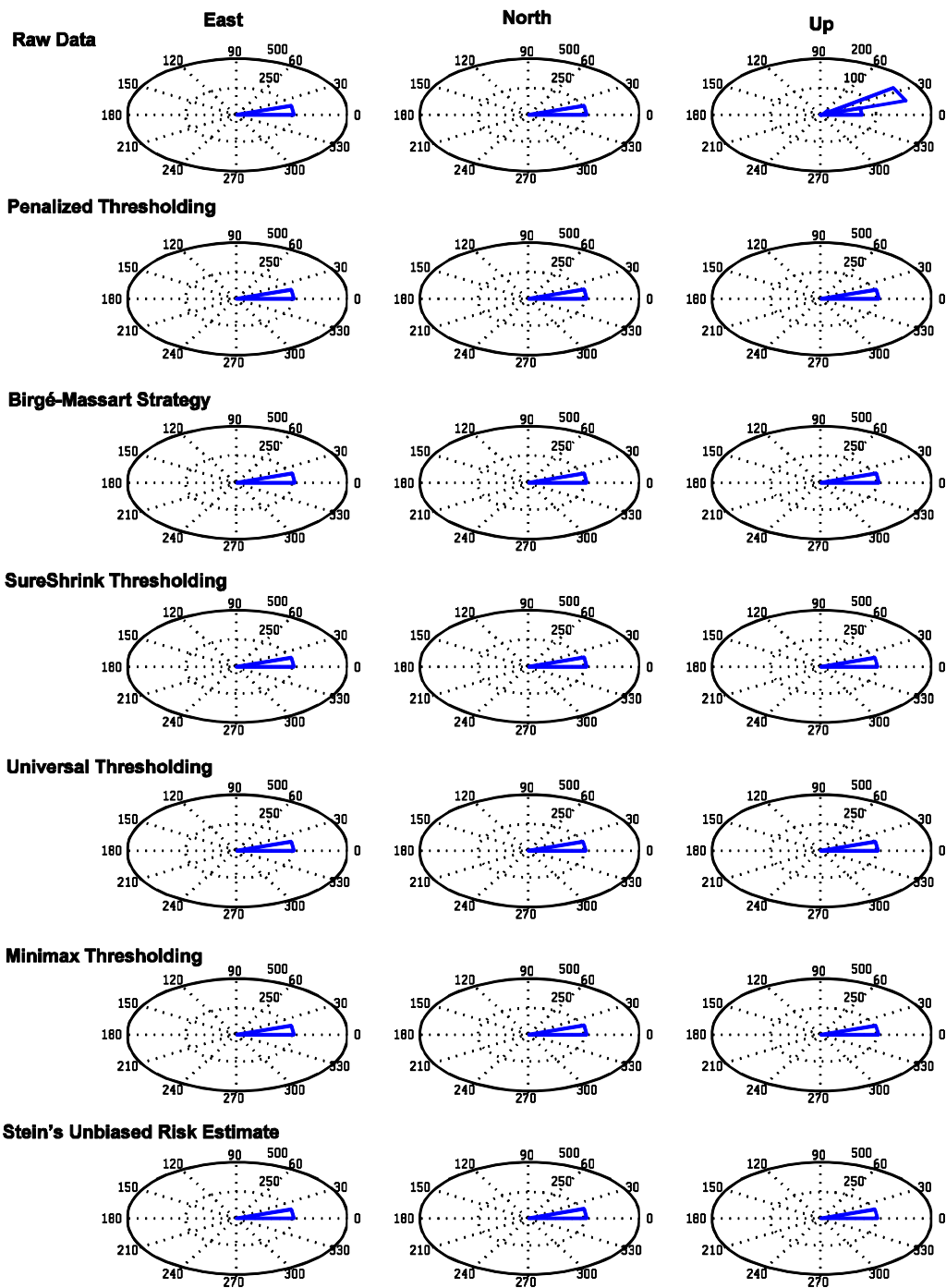
## ۷- بحث و نتیجه گیری

در این مقاله برای سنجش میزان نویز در سری های زمانی ایستگاه های دائمی GPS و میزان اثر بخشی روشهای آستانه گذاری در کاهش نویزها، از سه مدل استوکاستیک



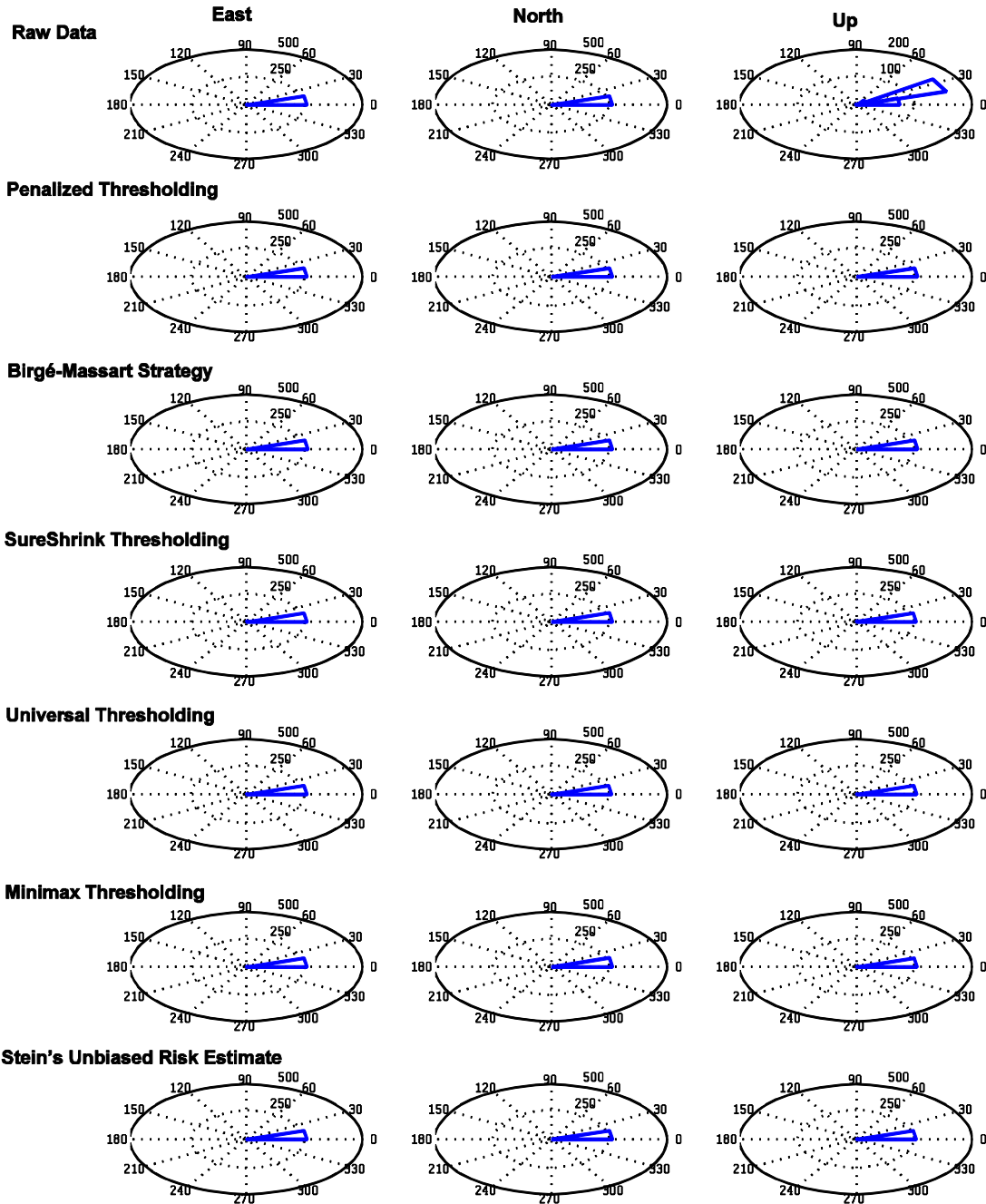
Angle histograms of White Noise in model I

شکل ۷- هیستوگرام زاویه ای از فراوانی نویز سفید در مدل استوکاستیک شامل نویز سفید (مدل I) از مولفه های مسطحاتی و قائم ایستگاه های GPS



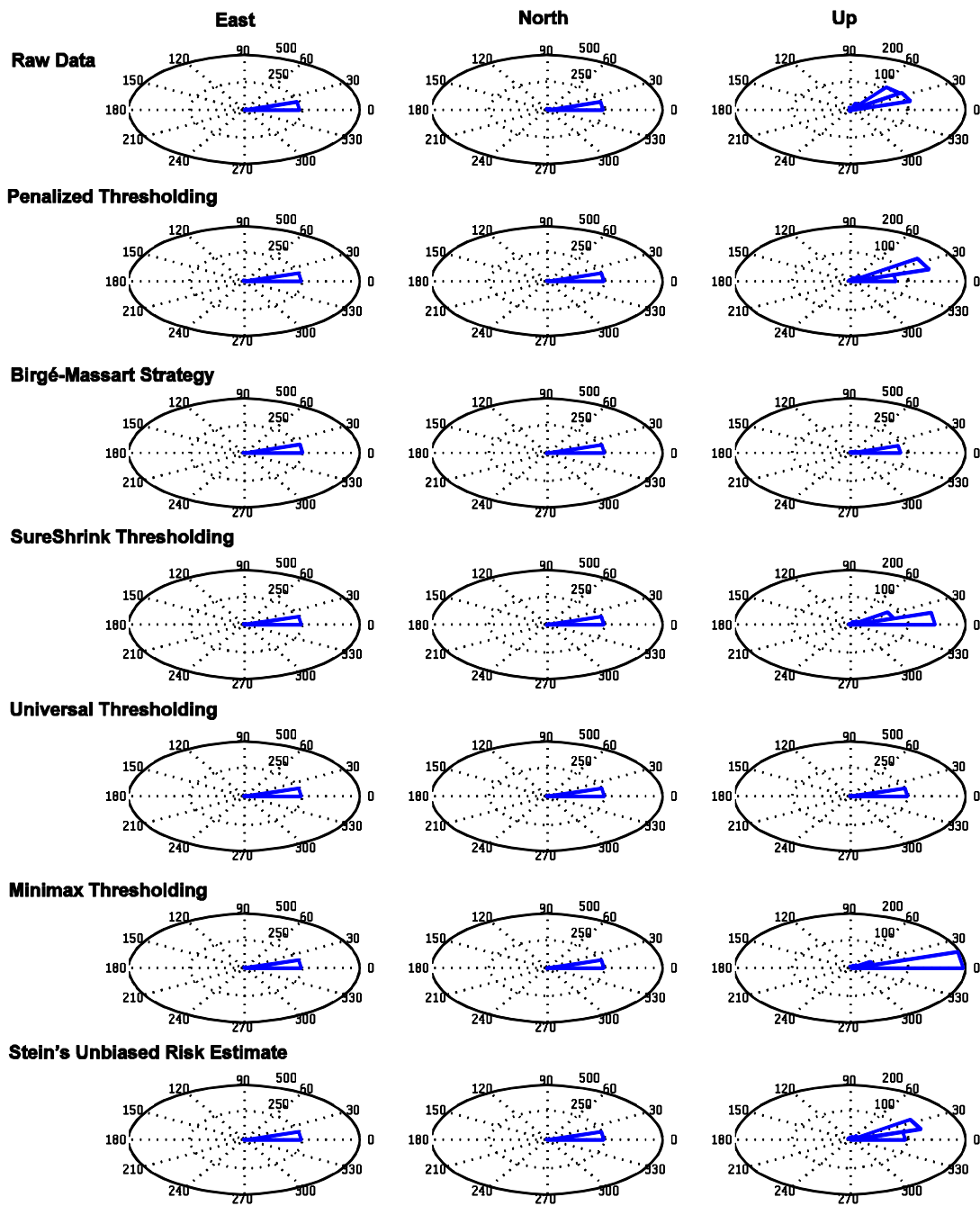
Angle histograms of white noise in model (II)

شکل ۸- هیستوگرام زاویه ای از فراوانی نویز سفید در مدل استوکاستیک ترکیبی شامل نویز سفید + تصادفی (مدل II) از مولفه های مسطحاتی و قائم ایستگاه های GPS.



Angle histograms of white noise in model (III)

شکل ۹- هیستوگرام زاویه ای از فراوانی نویز سفید در مدل استوکاستیک ترکیبی شامل نویز سفید + فلیکر (مدل III) از مولفه های مسطحاتی و قائم ایستگاه های GPS



Angle histograms of random walk noise in model (II)

شکل ۱۰- هیستوگرام زاویه ای از فراوانی نویز تصادفی (مدل II) از مولفه های مسطحاتی و قائم ایستگاه های GPS

- [1] Agnew, D. C. (1992). The time-domain behavior of power-law noises. *Geophysical Research Letters*, 19 (4), 333–336, doi:10.1029/91GL02832.
- [2] Amiri Simkooei, A. R., Tiberius, C. C. J. M., Teunissen, P. J. G (2007). Assessment of noise in GPS coordinate time series Methodology and results. *Journal of Geophysical Research*, 112, B07413.
- [3] Bessiss, Z., Terbeche, M., Ghezali, B. (2009). Wavelet application to the time series analysis of DORIS station coordinates. *Comptes Rendus Geosciences*, 341(6), 446-461.
- [4] Birgé, L. and Massart, P. (1997). From model selection to adaptive estimation. In *Festschrift for Lucien Le Cam* (pp. 55-88). New York: Springer.
- [5] Birgé, L. and Massart, P. (2001a). Gaussian model selection. *Journal of the European Mathematical Society*, 3(3), 203-268.
- [6] Birgé, L. and Massart, P. (2001b). A generalized  $C_p$  criterion for Gaussian model. *Universit'es de Paris 6 & Paris 7 - CNRS (UMR 7599)*.
- [7] Bos, M. S., Fernandes, R. M., Williams, S. D., Bastos, L. (2008). Fast error analysis of continuous GPS observations. *Journal of Geodesy*, 82(3), 157-166, doi: 10.1007/s00190-007-0165-x.
- [8] Calais, E. (1999). Continuous GPS measurements across the Western Alps, 1996–1998. *Geophysical Journal International*, 138, 221-230.
- [9] Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C. (2001). *Introduction to Algorithms* (Second ed.). MIT Press and McGraw-Hill.
- [10] DeVore, R. and Lucier, B. J. (1992). Wavelets. *Acta Numerica*, 1, 1-56.
- [11] Donoho, D. L. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, vol 81, 425-455.
- [12] Donoho, D. L. (1995). De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on information theory*, 41(3), 613-627.
- [13] Donoho, D. and Johnstone, I. (1994). Ideal de-noising in an orthonormal basis chosen from a library of bases. *Comptes Rendus Acad. Sci., Ser. I*, 319, 1317-1322.
- [14] Donoho, D. L. and Johnstone, I. M. (1998). Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Annals of Statistics*, 26(3), 879-921.
- [15] Fernandes, M. S. (2008). Fast error analysis of continuous GPS observations. *Journal of Geodesy*, 157-166.
- [16] Freedon, W., Gervens, T., Schreiner, M. (1998) *Constructive Approximation on the Sphere (With Applications to Geomathematics)*. Oxford Science Publication, Clarendon Press, 1998
- [17] Freedon, W., Michel, V., (2004) *Multiscale Potential Theory (With Applications to Geoscience)*. Birkhäuser Verlag, Boston, Basel, Berlin.
- [18] Johnson, H. O. and Agnew, D. C. (2000). Correlated noise in the geodetic time series. U.S. Geol. Surv. Final Tech. Rep.
- [19] Keller, W. (2004). *Wavelets in geodesy and geodynamics*. Walter de Gruyter, ISBN: 3110175460.
- [20] Langbein, J. (2004). Noise in two-color electronic distance meter measurements revisited. *Journal of Geophysical Research*, 109, B04406.
- [21] Mallat, S. (1987). Multiresolution approximation and wavelets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 315, 69-88.

- [22] Mao, A., Harrison, C. G., Dixon, T. H. (1999). Noise in GPS coordinate time series. *Journal of Geophysical Research*, 104(B2), 2797-2816.
- [23] Misiti, M. (2006). *Wavelets and their Applications*. United States: British Library Cataloguing-in Publication Data.
- [24] Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G., Poggi, J. (2006). *Wavelets and their Applications*. United States: Iste Publishing Company.
- [25] Moghtased-Azar, K. (2009). Surface deformation analysis of dense GPS networks based on intrinsic geometry: deterministic and stochastic aspects. *Journal of Geodesy*, 431-454.
- [26] Nikolaidis, R. (2002). *Observation of Geodetic and Seismic Deformation with the Global Positioning System*. San Diego: Phd Thesis, University of California.
- [27] Scargle, J. D. (1982). Studies in Astronomical time series analysis .II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *Astrophysical Journal*, Part 1, 263(2), 835-853.
- [28] Torrence, C. and Compo, G. P. (1998). A Practical Guide to Wavelet Analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1), 61-78.
- [29] Vidakovic, B. (1998). Nonlinear Wavelet Shrinkage With Bayes Rules and Bayes Factors. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 173-179.
- [30] Williams, S. D. (2008). CATS :GPS coordinate time series analysis software. *GPS Solutions*, 12(2), 147-153.
- [31] Williams, S. D., Bock, Y., Fang, P., Jamason, P., Nikolaidis, R. M., Prawirodirdjo, L., et al. (2004). Error analysis of continuous GPS position time series. *Journal of Geophysical Research*, 109(B3), B03412.
- [32] Wyatt, F. (1982). Displacement of Surface Monuments: Horizontal Motion. *Journal of Geophysical Research*, 87(B2), 979-989.
- [33] Wyatt, F. (1989). Displacement of Surface Monuments: Vertical Motion. *Journal of Geophysical Research*, 94(B2), 1655-1664.
- [34] Zhang, J., Bock, Y., Johnson, H., Fang, P., Williams, S., Genrich, J., et al. (1997). Southern California Permanent GPS Geodetic Array: Error analysis of daily position estimates site velocities. *Journal of geophysical research*, 102(B8), 18035-18055.