

# تحلیل ناریب تغییر شکل سه بعدی پوسته زمین با استفاده از مشاهدات GPS (مطالعه خاص: شبه جزیره کنای در آلاسکا)

محسن حبیبی<sup>۱\*</sup>، مسعود مشهدی حسینعلی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> کارشناسی ارشد ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی  
m\_habibi\_90@yahoo.com

<sup>۲</sup> دانشیار گروه ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی  
masoud.hossainali@gmail.com

(تاریخ دریافت آبان ۱۳۹۳، تاریخ تصویب دی ۱۳۹۳)

## چکیده

مسئله‌ی آنالیز استرین در حالت سه بعدی یکی از مباحث مورد توجه در مطالعه‌ی تغییر شکل پوسته‌ی زمین است. در این تحقیق، تغییر شکل سه بعدی پوسته‌ی زمین به کمک روش ایزوپارامتریک با بسط از حالت دوبعدی به حالت سه بعدی مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجایی که در شبکه‌های ژئودزی برخی از مولفه‌های طول بازهای بین نقاط شبکه (غالباً اختلاف ارتفاع بین نقاط) نسبت به سایر مؤلفه‌ها کوچکترند، تعمیم روش ایزوپارامتریک از دو بُعد به سه بعد برای آنالیز کرنش تغییر شکل سطحی پوسته‌ی زمین به مسئله‌ای بدو وضع منتهی می‌شود به طوری که جواب‌های حاصل ناپایدار می‌باشند. این ویژگی استفاده از روش‌های پایدارسازی را جهت حل این گونه مسائل اجتناب ناپذیر می‌سازد. استفاده از روش‌های پایدارسازی به ایجاد اریب در جواب حاصل می‌انجامد. برای حل این مشکل در این تحقیق، برای نخستین بار مسئله آنالیز سه بعدی تغییر شکل در سیستم مختصاتی جدید چنان فرموله و حل می‌شود که مسئله مورد بحث به مسئله‌ای با جوابی پایدار و یا مسئله‌ای خوش‌وضع تغییر می‌یابد. پارامترهای چنین سیستم مختصاتی در فرآیند برآورد مؤلفه‌های تنسور تغییر شکل برآورد می‌شود. شبه جزیره کنای واقع در جنوب مرکزی آلاسکا به عنوان منطقه‌ی مطالعاتی انتخاب شده است. ناپایداری مسئله‌ی سه بعدی آنالیز تغییر شکل در این منطقه قبلاً بررسی و به اثبات رسیده است. نتایج حاصل از روش توسعه یافته در این تحقیق وجود بیشینه مقدار بالا آمدگی در بخش مرکزی این منطقه را که در مقالات دیگر مورد تاکید قرار گرفته است، تایید می‌کند. برآوردهای حاصل برای تنسورهای کرنش سه بعدی در این منطقه نخستین برآوردهای نا اریب از این تنسورند که به روشی بدون المان محاسبه شده است. مقایسه نتایج حاصل با نتایج به دست آمده از آنالیز دوبعدی تغییر شکل در این منطقه (با روشی مشابه) نشان می‌دهد که بزرگی اثر تغییر شکل ارتفاعی بر مؤلفه‌های اصلی مسطحاتی تنسور کرنش به  $1/7$  میکرواسترین می‌رسد. این میزان در محدوده بزرگی مقادیر محاسبه شده برای مؤلفه‌های مسطحاتی مذکور در حالت دوبعدی است. بنابراین، صرف نظر کردن از اثر مؤلفه‌ی ارتفاعی و بررسی کینماتیک تغییر شکل پوسته‌ی زمین در دو بعد می‌تواند به اریب بالایی در نتایج حاصل منتهی گردد. با این وجود برخی از ویژگی‌های کلی تغییر شکل در این منطقه نظیر وقوع حداکثر فشارش در بخش مرکزی این شبکه هم‌چنان در نتایج حاصل از آنالیز دوبعدی تغییر شکل قابل مشاهده است. علاوه بر این، مطالعه‌ی میزان اریب ناشی از پایدارسازی جواب نشان می‌دهد که انتخاب نامناسب پارامتر پایدارسازی می‌تواند به اریب قابل ملاحظه‌ای در نتایج حاصل منتهی گردد. در این ارتباط، استفاده از خصوصیات با ویژگی‌های از پیش معلوم الگوی تغییر شکل در یک منطقه، نظیر وقوع حداکثر برآمدگی در بخش مرکزی شبکه، روش مناسبی برای انتخاب پارامتر پایدارسازی نیست.

**واژگان کلیدی:** مطالعه‌ی تغییر شکل، روش ایزوپارامتریک، گرادیان تغییر شکل، شبه جزیره کنای

\* نویسنده رابط

## ۱- مقدمه

مسئله‌ی آنالیز کرنش در حالت سه‌بعدی از مباحث مورد توجه در مطالعه‌ی تغییرشکل پوسته‌ی زمین می‌باشد. تغییرشکل سه‌بعدی پوسته‌ی زمین توسط افراد مختلفی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال، برنر (روشی برای بررسی تغییرشکل کلی پوسته‌ی زمین پیشنهاد کرده است که در آن از تغییرشکل به انتقالی افاین تعبیر می‌شود به طوری که وضعیت جسم را قبل از تغییرشکل به وضعیت آن پس از تغییرشکل مرتبط می‌سازد. به عبارت دیگر در این روش، تغییرشکل نگاشتی است که وضعیت جسم را قبل از تغییرشکل به وضعیت آن پس از تغییرشکل تصویر می‌نماید [۱]). یک تبدیل افاین به طور دقیق یک رابطه تابعی خطی است. بنابراین، به لحاظ نظری این نمایش ریاضی از مسئله با تغییرشکل‌های غیر-همگن سازگاری ندارد. گرافارند<sup>۲</sup> در سال ۱۹۸۶ تغییر-شکل‌های پوسته‌ی زمین در مقیاس جهانی (نظیر تغییر شکل‌های ناشی از بار جزر و مدی) را بر حسب هارمونیک‌های کروی فرموله یا بیان کرد [۲]. لیشتنگر<sup>۳</sup> و سانکل<sup>۴</sup> جنبه‌های تئوری آنالیز کینماتیک و دینامیک تغییر-شکل‌های دو و سه‌بعدی را بررسی کرده‌اند [۳]. در تحقیق مذکور کینماتیک ورقه‌های تکتونیکی در تئوری تکتونیک صفحه‌ای نیز مورد بررسی قرار گرفته است. ویتنبرگ<sup>۵</sup> ادعا کرده است که آنالیز سه‌بعدی تغییرشکل بر پایه روش‌های ژئودتیکی به دلیل کمبود اطلاعات مورد نیاز امکان‌پذیر نیست. این ادعا به‌طور کلی صحیح نبوده و به روش اتخاذ شده برای آنالیز تغییرشکل وابسته است [۴]. آلتینر<sup>۶</sup> تئوری تحلیلی آنالیز تغییرشکل را که مبتنی بر محاسبه معیارهای ذاتی هندسه یک رویه می‌باشد، پیشنهاد داده است [۵]. متأسفانه در این روش نمی‌توان معادلات ساختاری یا روابط تابعی بین پارامترهای توصیف‌کننده کینماتیک تغییر شکل (کرنش) و استرس را برای انواع مختلف رفتارهای رئولوژیک پوسته‌ی زمین نوشت.

روش‌های آنالیز کینماتیک تغییرشکل‌های سطحی پوسته زمین یا آنالیز کرنش را می‌توان به دو گروه روش-های بدون المان و روش‌های وابسته به المان طبقه‌بندی کرد. به عنوان مثال، روش تفاضل محدود نمونه‌ای از روش‌های گروه نخست و روش المان محدود نمونه‌ای از روش‌های گروه دوم است. وثوقی با تکیه بر مفاهیم نظریه پوسته در مکانیک محیط‌های پیوسته، روابط هندسه ذاتی و غیرذاتی تغییرشکل سطح زمین را با دو نگرش لاگرانژی و اولری مورد آنالیز قرار داده است. او دو روش المان محدود و تفاضل محدود را نیز مورد بررسی قرار داده است [۶]. این مقاله در نظر دارد تا از روش ایزوپارامتریک در آنالیز کینماتیک تغییرشکل سطحی پوسته‌ی زمین استفاده نماید. این روش یکی از روش‌های مطرح در تئوری الاستیسیته برای آنالیز تغییرشکل یک جسم تغییر-شکل پذیر است، که تغییرشکل در آن را می‌توان تابعی پیوسته از موقعیت ذرات آن دانست [۷]. در این روش از تغییرات نسبی فاصله بین هر نقطه با نقاط مجاور آن برای محاسبه عناصر تنسور کرنش استفاده می‌شود. در ژئودزی، استفاده از این روش برای آنالیز دو بعدی تغییر-شکل پوسته‌ی زمین بارها گزارش شده است [۸]. بررسی کارایی این روش در آنالیز سه‌بعدی کینماتیک تغییرشکل سطحی پوسته‌ی زمین از طریق تعمیم مدل ریاضی مربوطه از فضای دو بعدی به فضای سه‌بعدی نشان می‌دهد که مسئله مورد بحث دارای جوابی ناپایدار است. به طور کلی تفاوت اندازه‌ی مؤلفه‌های طول‌بازهای یک شبکه عامل ناپایداری جواب در آنالیز سه‌بعدی تغییرشکل با این روش محسوب می‌شود [۹]. این مقاله در نظر دارد تا با جستجوی سیستم مختصاتی مناسب و با فرموله کردن این مسئله در چنین سیستم مختصاتی، مشکل ناپایداری این جواب را حل نماید. برای این کار، ابتدا مدل ریاضی مسئله بر حسب تنسور گرادیان تغییرشکل بازنویسی شده و مشخصات سیستم مختصات مذکور از طریق بررسی شرایط نوردایی این تنسور تعیین می‌شود.

بخش دوم از این مقاله به معرفی روش پیشنهاد شده در این مقاله می‌پردازد. برای این منظور و در زیر بخش ۲-۱، روش ایزوپارامتریک معرفی می‌شود. در ادامه مدل ریاضی مورد نظر از فضای دو بعدی به فضای سه‌بعدی تعمیم یافته و با بررسی شرایط نوردایی تنسور گرادیان تغییرشکل در بخش ۲-۲، مشخصات سیستم مختصاتی

۱ Brunner  
۲ Grafarend  
۳ Lichtenegger  
۴ Sünkel  
۵ Wittenburg  
۶ Altiner

نسبی فاصله بین هر نقطه از آن با نقاط مجاور (روش ایزوپارامتریک) و یا بر مبنای تغییرات نسبی مختصات آن نقطه نسبت به نقاط مجاور (روش لاگرانژی) بررسی کرد [۹]. دو رویکرد مذکور، هر دو از روش‌های بدون المان در آنالیز تغییرشکل محسوب می‌شوند. از این دو رویکرد می‌توان برای بررسی تغییرشکل‌های پیوسته بی‌نهایت و یا غیر بی‌نهایت کوچک استفاده کرد. در این تحقیق از روش ایزوپارامتریک برای بررسی تغییرشکل‌های بی‌نهایت کوچک سطحی پوسته‌ی زمین استفاده می‌شود.

از آنجا که روش مورد استفاده در این مقاله مبتنی بر تعمیم روش ایزوپارامتریک از فضای دوبعدی به فضای سه‌بعدی است، در ابتدا به معرفی این روش در آنالیز دو-بعدي تغییرشکل پرداخته می‌شود.

به سادگی می‌توان نشان داد که اگر  $L_{ki}$  و  $m_{ki}$  امتداد بین دو نقطه‌ی  $k$  (نقطه‌ی محاسباتی - نقطه‌ای که عناصر تنسور کرنش آن مد نظر است) و  $i$ ،  $i = 1, \dots, p$ ، (نقاط سهیم - نقاطی که در محاسبه تنسور کرنش نقطه  $k$  از آن‌ها استفاده می‌شود) باشند؛ تغییرات نسبی فاصله‌ی بین نقطه‌ی  $k$  و هر یک از نقاط  $i$  را می‌توان به صورت زیر بر حسب عناصر تنسور کرنش در نقطه محاسباتی نوشت:

$$q_{ki} = \frac{L_{ki} - L'_{ki}}{L_{ki}} = e_{xx} l_{ki}^2 + e_{yy} m_{ki}^2 + e_{xy} l_{ki} m_{ki} \quad (1)$$

در این رابطه  $L_{pi}$  و  $L'_{pi}$  به ترتیب فاصله بین نقاط  $p$  و  $i$  قبل و پس از تغییرشکل جسم می‌باشند. علاوه بر این،  $e_{xx}$ ،  $e_{yy}$  و  $e_{xy}$  عناصر تنسور کرنش هستند. به عبارت دیگر:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن،

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

در این معادلات  $u$  و  $v$  مؤلفه‌های بردار جابجایی می‌باشند.

در آنالیز تغییرشکل‌های سطحی پوسته‌ی زمین با استفاده از مشاهدات شبکه‌های ژئودزی منطقه‌ای، فواصل

که فرموله کردن مسئله‌ی آنالیز سه‌بعدی تغییرشکل در آن می‌تواند مشکل ناپایداری جواب را مرتفع نماید؛ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه و در بخش سوم از این مقاله، منطقه مطالعاتی و نتایج عددی حاصل مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. بخش ۴ به نتیجه‌گیری و جمع‌بندی این تحقیق می‌پردازد.

## ۲- روش تحقیق

تغییرشکل زمین یک پدیده‌ی سه‌بعدی در طبیعت می‌باشد. بنابراین، مطالعه این پدیده در دو بعد با کاهش مشاهدات بر روی سطح یک دیتوم مسطحاتی یا در نظر گرفتن آن به صورت یک فرآیند قائم محض می‌تواند به تحلیلی نادرست از تغییرشکل منتهی گردد. بنابراین، بهترین رویکرد در بررسی کینماتیک و دینامیک تغییر-شکل زمین، بررسی و مطالعه‌ی این پدیده در فضای سه-بعدی می‌باشد. مسئله آنالیز استرین در حالت سه‌بعدی مسئله‌ای ناپایدار بوده و به مسئله‌ی بدوضع تبدیل می‌گردد. در نتایج پیشین روش پایدارسازی برای حل این گونه مسائل مورد استفاده قرار گرفته است. تکنیک تجزیه مقدار منفرد منقطع<sup>۱</sup> به عنوان یکی از تکنیک‌های پایدارسازی بوده که در نتایج پیشین از آن استفاده گردیده است. در این تکنیک مسئله  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$  جایگزین مسئله اصلی  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$  شده و در نتیجه جواب حاصل مقدار تقریبی  $\underline{x}_k$  خواهد بود و مقدار واقعی  $\underline{x}$  نیست، پس جواب حاصل از این روش دارای اریب از مقدار واقعی خواهد بود [۱۰]. این مقاله به معرفی روشی جدید برای آنالیز سه‌بعدی کینماتیک تغییرشکل پوسته‌ی زمین می‌پردازد که جواب آن آلوده به اریب ناشی از پایدارسازی نیست.

## ۲-۱- روش ایزوپارامتریک در آنالیز تغییرشکل

بر اساس تئوری الاستیسیته، تغییرشکل‌های پیوسته‌ی یک جسم تغییرشکل پذیر را می‌توان با استفاده از تغییرات

<sup>۱</sup> TSVD

$L'_{ki}$  و  $L_{ki}$  طول خم ژئودزیک بین نقاط  $k$  و  $i$  قبل و بعد از تغییرشکل و  $l_{ki}$  و  $m_{ki}$  کسینوس هادی‌های این خم قبل یا بعد از تغییرشکل آن می‌باشند. در این مقاله از روابط پیشنهادی رینسفورد<sup>۱</sup> برای محاسبه پارامترهای مذکور استفاده شده است [۱۱]. بر اساس [۱۲] اگر:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

تنسور گرادیان تغییرشکل باشد خواهیم داشت:

$$\mathbf{E} = \left( \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^T - \mathbf{I} \right) \quad (5)$$

در روابط فوق، بردارهای  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_0$  به ترتیب بردارهایی شامل موقعیت نقاط شبکه قبل و بعد از تغییرشکل (در اپک‌های اندازه‌گیری  $t_0$  و  $t$ ) و  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$  ماتریسی یکه است. با جایگذاری روابط (۴) در رابطه (۵) داریم:

$$\begin{aligned} f_{xx}^2 + f_{xy}^2 &= 2e_{xx} + 1 \\ f_{xx}f_{yx} + f_{xy}f_{yy} &= 2e_{xy} \\ f_{yx}^2 + f_{yy}^2 &= 2e_{yy} + 1 \end{aligned} \quad (6)$$

بدیهی است که با استفاده از معادلات (۶) می‌توان مدل ریاضی (۱) را بر حسب عناصر تنسور گرادیان تغییرشکل بازنویسی کرد. انجام آنالیز تغییرشکل در سه بعد به روش ایزوپارامتریک مستلزم تعمیم مدل ریاضی (۱) از فضای دوبعدی به فضای سه‌بعدی است. در این حالت می‌توان نوشت [۹]:

$$q_{ki} = \frac{L_{ki} - L'_{ki}}{L_{ki}} = e_{xx} l_{ki}^2 + e_{yy} m_{ki}^2 + e_{zz} n_{ki}^2 + e_{xy} l_{ki} m_{ki} + e_{xz} l_{ki} n_{ki} + e_{yz} n_{ki} m_{ki} \quad (7)$$

که در آن علاوه بر روابط (۳) خواهیم داشت:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, e_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

همچنین، مجدداً با استفاده از رابطه (۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f_{xx}f_{xx} + 1 &= 2e_{xx} + 1, f_{yy}f_{yy} + 1 = 2e_{yy} + 1, \\ f_{zz}f_{zz} + 1 &= 2e_{zz} + 1 \\ f_{xy}f_{xy} &= 2e_{xy}, f_{xz}f_{xz} = 2e_{xz}, f_{yz}f_{yz} = 2e_{yz} \end{aligned} \quad (9)$$

در این رابطه  $\gamma \in \{x, y, z\}$  اندیس جمع می‌باشد. بر اساس معادله‌ی (۷)، ماتریس ضرایب  $\mathbf{A}$  در دستگاه معادلات مشاهدات مربوط به آنالیز سه‌بعدی تغییرشکل به روش ایزوپارامتریک عبارت است از:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta E_{k1}^2}{L_{k1}^2} & \frac{\Delta N_{k1}^2}{L_{k1}^2} & \frac{\Delta E_{k1} \Delta N_{k1}}{L_{k1}^2} & \frac{\Delta E_{k1} \Delta U_{k1}}{L_{k1}^2} & \frac{\Delta N_{k1} \Delta U_{k1}}{L_{k1}^2} & \frac{\Delta U_{k1}^2}{L_{k1}^2} \\ \frac{\Delta E_{k2}^2}{L_{k2}^2} & \frac{\Delta N_{k2}^2}{L_{k2}^2} & \frac{\Delta E_{k2} \Delta N_{k2}}{L_{k2}^2} & \frac{\Delta E_{k2} \Delta U_{k2}}{L_{k2}^2} & \frac{\Delta N_{k2} \Delta U_{k2}}{L_{k2}^2} & \frac{\Delta U_{k2}^2}{L_{k2}^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta E_{kp}^2}{L_{kp}^2} & \frac{\Delta N_{kp}^2}{L_{kp}^2} & \frac{\Delta E_{kp} \Delta N_{kp}}{L_{kp}^2} & \frac{\Delta E_{kp} \Delta U_{kp}}{L_{kp}^2} & \frac{\Delta N_{kp} \Delta U_{kp}}{L_{kp}^2} & \frac{\Delta U_{kp}^2}{L_{kp}^2} \end{bmatrix}_{p \times 6} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)  $\mathbf{E}$ ،  $\mathbf{N}$  و  $\mathbf{U}$  به ترتیب مؤلفه‌های اول، دوم و سوم محورهای مختصات کارترین سیستم مختصات کارترین توپوسنتریک می‌باشد و  $\Delta E_{ki}$ ،  $\Delta N_{ki}$  و  $\Delta U_{ki}$  مولفه‌های طول باز  $L_{ki}$  در سیستم مختصاتی محلی (توپوسنتریک) می‌باشند. با توجه به این ماتریس، چنانچه یکی از مولفه‌های طول بازهای بین نقاط یک شبکه صفر باشد (مثلاً در صورتیکه  $\Delta U_{ki} = 0$  و یا شبکه در منطقه‌ای کاملاً مسطح قرار داشته باشد)، این ماتریس از مرتبه کاملی برخوردار نخواهد بود. علاوه بر این، چنانچه یکی از مولفه‌های طول بازهای شبکه به مراتب کوچکتر از سایر مولفه‌های آن باشد (مثلاً  $\Delta E_{ki} \ll \Delta N_{ki}$  و  $\Delta U_{ki} \ll \Delta N_{ki}$ ) و یا شبکه در منطقه‌ای نسبتاً مسطح قرار داشته باشد) اندازه عناصر برخی از ستون‌های این ماتریس بسیار کوچکتر از اندازه عناصر ستون‌های دیگر آن (در این مثال ستون‌های ۴، ۵ و ۶ در مقایسه با ستون‌های ۱، ۲ و ۳) خواهد بود. در این شرایط عدد شرط این ماتریس مقداری بزرگ داشته و جواب مسئله‌ی آنالیز سه‌بعدی تغییرشکل می‌تواند ناپایدار باشد. با استفاده از شرط گسسته پیکارد [۱۳]، حسینعلی و همکاران [۹] ناپایداری جواب کمترین مربعات مسئله‌ی آنالیز سه‌بعدی تغییرشکل را به روش‌های بدون المان ایزوپارامتریک و لاگرانژ در منطقه مورد مطالعه این تحقیق بررسی نموده و نشان داده‌اند که جواب حاصل

<sup>۱</sup> Rainsford

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_0} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_0} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{R} \mathbf{R}_0^T \boldsymbol{\mu}_0^{-1} \quad (13)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \text{diag}(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) \quad (14)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\lambda_{\tilde{x}}, \lambda_{\tilde{y}}, \lambda_{\tilde{z}}) \quad (15)$$

همچنین  $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$  ضرائب مقیاس سه محور  $(x, y, z)$  در سیستم مختصات  $xyz$  بوده و  $(\lambda_{\tilde{x}}, \lambda_{\tilde{y}}, \lambda_{\tilde{z}})$  ضرائب مقیاس سه محور  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  در سیستم مختصات  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  می‌باشد. در اینجا هدف، دستیابی به سیستم مختصاتی است که در آن مسئله‌ی آنالیز سه-بعدی تغییرشکل با استفاده از روش ارائه شده در بخش ۱-۲ به جوابی پایدار منتهی گردد. به این منظور، در این مقاله تلاش می‌شود تا با استفاده از رابطه (۱۳)، ماتریس-های دوران  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{R}_0$  و ضرایب مقیاس  $\boldsymbol{\mu}$  و  $\boldsymbol{\mu}_0$  به گونه‌ای تعیین گردند؛ که با بازنویسی نسبت  $q_{ki}$  و کسینوس-های  $l_{ki}$ ،  $m_{ki}$  و  $n_{ki}$  از معادله (۷) در این سیستم، مسئله مورد بررسی دارای جواب پایدار باشد.

ناپایداری جواب مسئله‌ی آنالیز سه‌بعدی تغییرشکل ناشی از اختلاف اندازه‌ی مؤلفه‌های طول بازهای شبکه ژئودزی مورد استفاده است. بنابراین، ایجاد دوران در سیستم مختصات مورد استفاده نمی‌تواند به سیستم مختصاتی منتهی گردد که فرموله کردن این مسئله در آن پایداری جواب را ضمانت نماید. به این ترتیب از دوران‌های  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{R}_0$  در رابطه‌ی (۱۳) می‌توان صرفنظر کرده و با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در این رابطه تنسور گرادیان جابجایی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_{\tilde{x}}}{\lambda_x} f_{xx} & \frac{\lambda_{\tilde{x}}}{\lambda_y} f_{xy} & \frac{\lambda_{\tilde{x}}}{\lambda_z} f_{xz} \\ \frac{\lambda_{\tilde{y}}}{\lambda_x} f_{yx} & \frac{\lambda_{\tilde{y}}}{\lambda_y} f_{yy} & \frac{\lambda_{\tilde{y}}}{\lambda_z} f_{yz} \\ \frac{\lambda_{\tilde{z}}}{\lambda_x} f_{zx} & \frac{\lambda_{\tilde{z}}}{\lambda_y} f_{zy} & \frac{\lambda_{\tilde{z}}}{\lambda_z} f_{zz} \end{bmatrix} \quad (16)$$

در رابطه‌ی (۱۶)، تنها پارامتر باقی‌مانده ضرایب مقیاس محورهای سیستم‌های مختصات مذکور است. با تغییر مقیاس محور(های) مختصات به نحوی مناسب،

از روش کمترین مربعات در این دو مسئله ناپایدار است. در تحقیق مذکور، آنالیز حساسیت تنسور گرانش نشان می‌دهد که مؤلفه‌های  $e_{zz}$ ،  $e_{xz}$  و  $e_{yz}$  از حساسیت بیشتری نسبت به تغییرات پارامترهای ورودی برخوردار است (ناپایدارترند). این متغیرها، متغیرهای نظیر ستون‌های ۴، ۵ و ۶ در ماتریس  $\mathbf{A}$  (رابطه ۱۰) می‌باشند.

از آنجایی که ناپایداری جواب مسئله‌ی مورد بحث ناشی از اختلاف اندازه مؤلفه‌های طول‌بازهای یک شبکه است، انتظار می‌رود تا فرموله کردن مسئله در سیستم مختصاتی مناسب، مسئله مورد نظر را به مسئله‌ای با جواب پایدار تبدیل نماید. به طوری که در بخش بعدی این مقاله ملاحظه می‌شود، بررسی شرایط ناوردایی تنسور گرادیان تغییرشکل می‌تواند شرایط مورد نیاز را جهت دستیابی به چنین سیستم مختصاتی فراهم نماید.

## ۲-۲- بررسی ناوردایی عناصر تنسور گرادیان تغییرشکل

اگر  $\mathbf{x}_0$  و  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  به ترتیب بردارهای موقعیت نقاط یک جسم تغییرشکل پذیر (در اینجا نقاط یک شبکه ژئودزی) در اپک  $t_0$  و (پیش از تغییرشکل) در دو سیستم مختصات  $xyz$  و  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  باشند به نحوی که پارامترهای ترانسفورماسیون بین آن‌ها به ترتیب شامل انتقال  $\mathbf{d}_0$ ، ماتریس دوران  $\mathbf{R}_0$  و ضریب مقیاس  $\boldsymbol{\mu}_0$  باشد می‌توان نوشت [۱۲]:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \boldsymbol{\mu}_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_0 \quad (11)$$

به ترتیبی مشابه برای دو بردار موقعیت مشابه  $\mathbf{x}$  و  $\tilde{\mathbf{x}}$  در اپک  $t$  (پس از تغییرشکل) خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad (12)$$

در رابطه (۱۲)  $\mathbf{d}$ ،  $\mathbf{R}$  و  $\boldsymbol{\mu}$  به ترتیب بردار انتقال، ماتریس دوران و ماتریس مقیاس می‌باشند. برای بررسی اثر تغییر سیستم مختصات بر تنسور گرادیان تغییرشکل، با به کارگیری قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای، این تنسور را می‌توان در سیستم مختصات  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  به صورت زیر نوشت:

اندازه‌ی فاصله بین نقاط شبکه و در نتیجه تغییرات نسبی فواصل بین این نقاط به وجود آید. برای این منظور چنانچه  $dx$ ،  $dy$  و  $dz$  مؤلفه‌های یک طول باز در سیستم مختصات نخست و  $d\tilde{x}$ ،  $d\tilde{y}$  و  $d\tilde{z}$  مؤلفه‌های این طول باز در سیستم مختصات مورد جستجو باشند، رابطه زیر نوردایی این طول را ضمانت می‌کند:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 \quad (18)$$

که در آن  $d\tilde{z} = \lambda dz$  می‌باشد. با فرض:

$$d\tilde{x} = \beta dx, \quad d\tilde{y} = \beta dy \quad (19)$$

خواهیم داشت:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{(\lambda^2 - 1)dz^2}{dx^2 + dy^2}}$$

به این ترتیب، برای حفظ ویژگی نوردایی فاصله بین نقاط در سیستم مختصاتی که محور سوم آن با تغییر مقیاسی به بزرگی  $\lambda$  همراه است، فاصله میان نقاط از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$L_{ki} = \sqrt{\beta^2 \Delta x_{ki}^2 + \beta^2 \Delta y_{ki}^2 + \lambda^2 \Delta z_{ki}^2} \quad (20)$$

به ترتیبی مشابه، کسینوس هادی‌های امتداد بین نقاط شبکه نیز از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$l_{ki}^2 = \frac{\beta^2 \Delta x_{ki}^2}{\beta^2 \Delta x_{ki}^2 + \beta^2 \Delta y_{ki}^2 + \lambda^2 \Delta z_{ki}^2} \quad (21)$$

$$m_{ki}^2 = \frac{\beta^2 \Delta y_{ki}^2}{\beta^2 \Delta x_{ki}^2 + \beta^2 \Delta y_{ki}^2 + \lambda^2 \Delta z_{ki}^2} \quad (22)$$

$$n_{ki}^2 = \frac{\lambda^2 \Delta z_{ki}^2}{\beta^2 \Delta x_{ki}^2 + \beta^2 \Delta y_{ki}^2 + \lambda^2 \Delta z_{ki}^2} \quad (23)$$

به این ترتیب، در سیستم مختصات مورد جستجو؛ بردارهای مشاهدات، مجهولات و مدل ریاضی عبارتند از:

$$\mathbf{l} = [q_{k1} \quad \dots \quad q_{kp}]^T \quad (24)$$

$$\mathbf{x} = [f_{xx} \quad f_{xy} \quad f_{xz} \quad f_{yy} \quad f_{yz} \quad f_{zz}]^T \quad (25)$$

اختلاف اندازه مؤلفه‌های طول بازهای یک شبکه را می‌توان جبران کرد. این تغییر مقیاس به کاهش عدد شرط ماتریس ضرایب و در نتیجه افزایش پایداری جواب منتهی می‌گردد.

آنالیز حساسیت تنسور تغییرشکل در منطقه مورد مطالعه در این تحقیق نشان داده است. که مؤلفه‌های برشی  $e_{yz}$ ،  $e_{xz}$  و مؤلفه‌ی ارتفاعی  $e_{zz}$  از تنسور تغییرشکل ناپایدارترین عناصر بردار مجهولات در دستگاه معادلات مشاهدات (۷) می‌باشند [۹]. بنابراین، تنها با تغییر مقیاس محور  $\tilde{z}$  در سیستم مختصات مورد جستجو می‌توان مشکل ناپایداری جواب را مرتفع کرد. به این ترتیب، با فرض  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 1$  خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \frac{1}{\lambda_z} f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & \frac{1}{\lambda_z} f_{yz} \\ \lambda_z f_{zx} & \lambda_z f_{zy} & \frac{\lambda_z}{\lambda_z} f_{zz} \end{bmatrix}$$

در ادامه و برای سادگی، مقیاس محورهای  $\tilde{z}$  و  $z$  را برابر در نظر می‌گیریم. به این ترتیب با نمایش  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$ ، در نهایت داریم:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & \frac{1}{\lambda} f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & \frac{1}{\lambda} f_{yz} \\ \lambda f_{zx} & \lambda f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \quad (17)$$

چنین تغییر مقیاسی، در صورتی نوردایی عناصر تنسور گرادیان تغییرشکل و در نتیجه تنسور گرنش را مخدوش نمی‌کند؛ که مدل ریاضی (رابطه ۷) بر حسب عناصر تنسور گرادیان تغییرشکل در سیستم مختصات نخست (سیستم مختصاتی که موقعیت نقاط شبکه در آن محاسبه شده است) فرموله شده و نسبت  $q_{ki}$  و کسینوس هادی-های  $l_{ki}$ ،  $m_{ki}$  و  $n_{ki}$  از معادله (۷) در سیستم مختصات جدید بازنویسی گردند.

از آن جایی که فاصله بین نقاط پارامتری ناوردا است، با تغییر سیستم مختصات مورد استفاده نباید تغییری در

پوسته‌ی زمین است [۱۴، ۱۵] جنوب مرکزی آلاسکا که از شمال به فیربنکس<sup>۱</sup> و از جنوب به خلیج آلاسکا محدود می‌شود، یکی از لرزه‌خیزترین مناطق زمین است. اغلب آتش فشان‌های فعال در این منطقه قرار دارند. فعالیت‌های لرزه‌ای در این منطقه ناشی از حرکت پادساعت‌گرد ورقه زمین‌ساختی اقیانوس آرام<sup>۲</sup> و فرورانش پوسته‌ی اقیانوسی در منطقه‌ی آلاسکا است. پوسته‌ی زمین در این منطقه تحت تاثیر زمین‌لرزه‌ی سال ۱۹۶۴ با بزرگای گشتاوری  $M_w = 9.2$  [۱۶]، دستخوش تغییرشکلی قابل ملاحظه شد. در اثر این زمین‌لرزه جابجایی‌هایی هم‌لرزه به بزرگی بیش از ۲۰ متر در این منطقه گزارش شده است [۱۷]. با وقوع این زمین لرزه، تقریباً تمام قسمت‌های شبه جزیره کنای در منطقه دستخوش فرونشست شده و در مقابل بخشی از پوسته اقیانوسی که در شرق این شبه جزیره قرار دارد دچار بالآمدگی گردید. حداکثر بزرگی بالآمدگی پوسته اقیانوسی ۱۲ متر گزارش شده است [۱۸]. تغییرشکل پس لرزه پوسته‌ی زمین در این منطقه نخستین بار از آنالیز داده‌های جزر و مد و ترازبایی خطوط ترازبایی در این منطقه گزارش شد [۱۹]. برای درک بیشتر مکانیزم تغییر شکل در این منطقه مشاهدات GPS نیز به اندازه-گیری‌های ژئودیتیک در این منطقه اضافه شد. با استفاده از مشاهدات GPS انجام شده در سال‌های ۱۹۹۳ تا ۱۹۹۵، مشاهدات ترازبایی که بلافاصله پس از زمین لرزه مذکور انجام شده و یک مدل منطقه‌ای از ژئوئید، کهن و فریمولر [۲۰] الگوی از تغییرشکل ارتفاعی را در محدوده شبه جزیره کنای پیشنهاد داده‌اند. بر اساس این الگو در این فاز از تغییرشکل، پوسته‌ی زمین در جزیره مذکور دستخوش بالآمدگی گنبدی شکل است. بیشترین مقدار این بالا-آمدگی در بخش مرکزی این شبه جزیره مشاهده می‌شود. شکل ۱ این الگوی تغییر شکل را نمایش می‌دهد.

برای بررسی کارایی روش پیشنهاد شده در این مقاله، مشاهدات تعداد ۱۹ ایستگاه موردی GPS که اندازه‌گیری آن‌ها در سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۸ انجام شده است (شکل ۲) از پایگاه داده سرویس UNAVCO دریافت و با نرم‌افزار Bernese پردازش شده است. جزئیات مربوط به چگونگی پردازش این مشاهدات در [۱۰] ارائه شده است.

$$\begin{aligned}
 q_{ki} &= \frac{L'_{ki} - L_{ki}}{L_{ki}} = l_{ki}^2 \left[ \frac{1}{2} (f_{xx}^2 + f_{yy}^2 + \lambda^2 f_{xz}^2 - 1) \right] + \\
 & m_{ki}^2 \left[ \frac{1}{2} (f_{xy}^2 + f_{yy}^2 + \lambda^2 f_{yz}^2 - 1) \right] + \\
 & n_{ki}^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda^2} f_{xz}^2 + \frac{1}{\lambda^2} f_{yz}^2 + f_{zz}^2 - 1 \right) \right] + \\
 & l_{ki} m_{ki} \left[ \frac{1}{2} (f_{xx} f_{xy} + f_{xy} f_{yy} + \lambda^2 f_{xz} f_{yz}) \right] + \\
 & l_{ki} n_{ki} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} f_{xx} f_{xz} + \frac{1}{\lambda} f_{xy} f_{yz} + \lambda f_{xz} f_{zz} \right) \right] + \\
 & n_{ki} m_{ki} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} f_{xy} f_{xz} + \frac{1}{\lambda} f_{yy} f_{yz} + \lambda f_{yz} f_{zz} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{26}$$

که در آن فاصله بین نقاط شبکه قبل و بعد از تغییر-شکل با رابطه (۲۰) (با مختصات متناسب با هر اپک) و کسینوس هادی‌های امتداد بین نقاط با روابط (۲۱) ، (۲۲) و (۲۳) (برای کسینوس هادی فرقی نمی‌کند که مختصات کدام اپک استفاده می‌گردد) محاسبه می‌شوند. برای دستیابی به جوابی پایدار، ضریب مقیاس  $\lambda$  و به دنبال آن پارامتر  $\beta$  از مقایسه نسبت‌های  $\frac{\Delta x_{ki}}{L_{ki}}$  ،  $\frac{\Delta y_{ki}}{L_{ki}}$  و  $\frac{\Delta z_{ki}}{L_{ki}}$  چنان انتخاب شده است که عدد شرط ماتریس ضرایب **A** کوچکترین مقدار ممکن گردد. به عبارت دیگر:

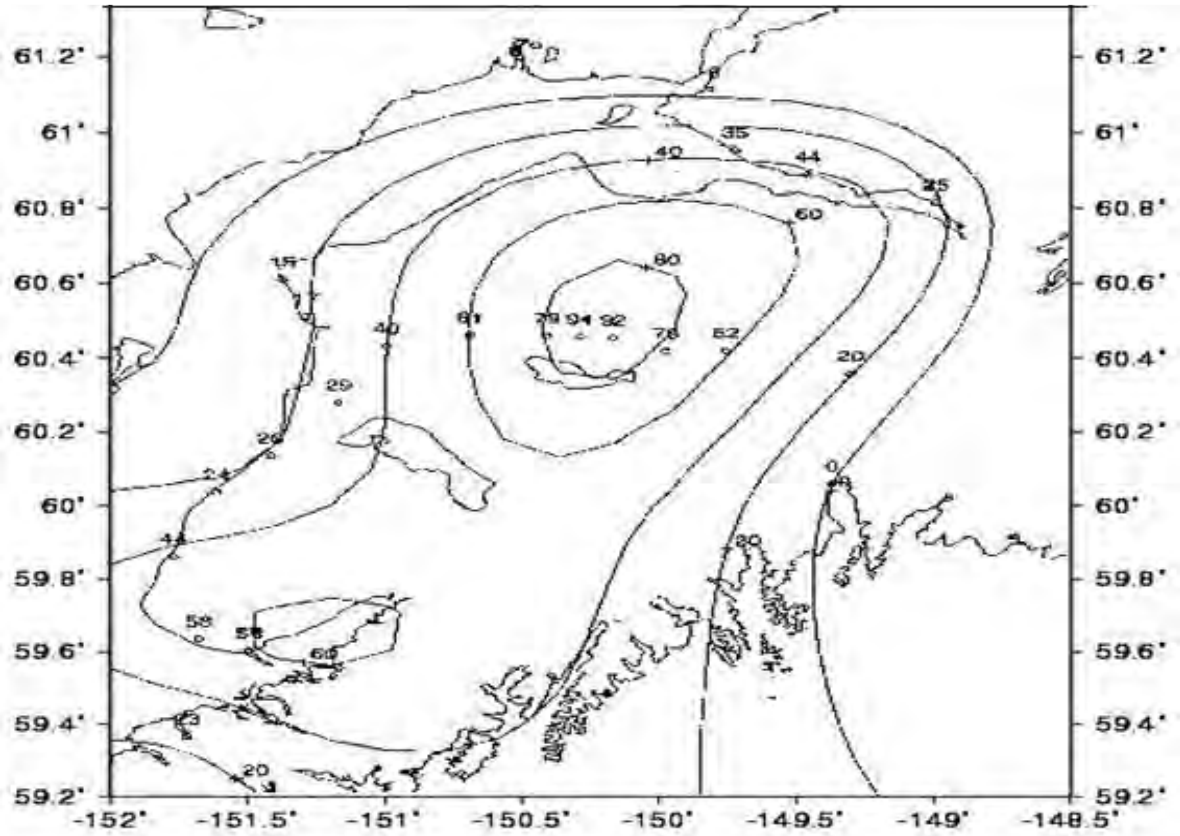
$$\lambda = \min \left\{ \left( \frac{\Delta x_{ki}}{L_{ki}} \right)^{-1}, \left( \frac{\Delta y_{ki}}{L_{ki}} \right)^{-1}, \left( \frac{\Delta z_{ki}}{L_{ki}} \right)^{-1} \right\} \left[ \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \right] \tag{27}$$

که در آن  $\sigma_{\min}$  و  $\sigma_{\max}$  به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر منفرد ماتریس **A** می‌باشند.

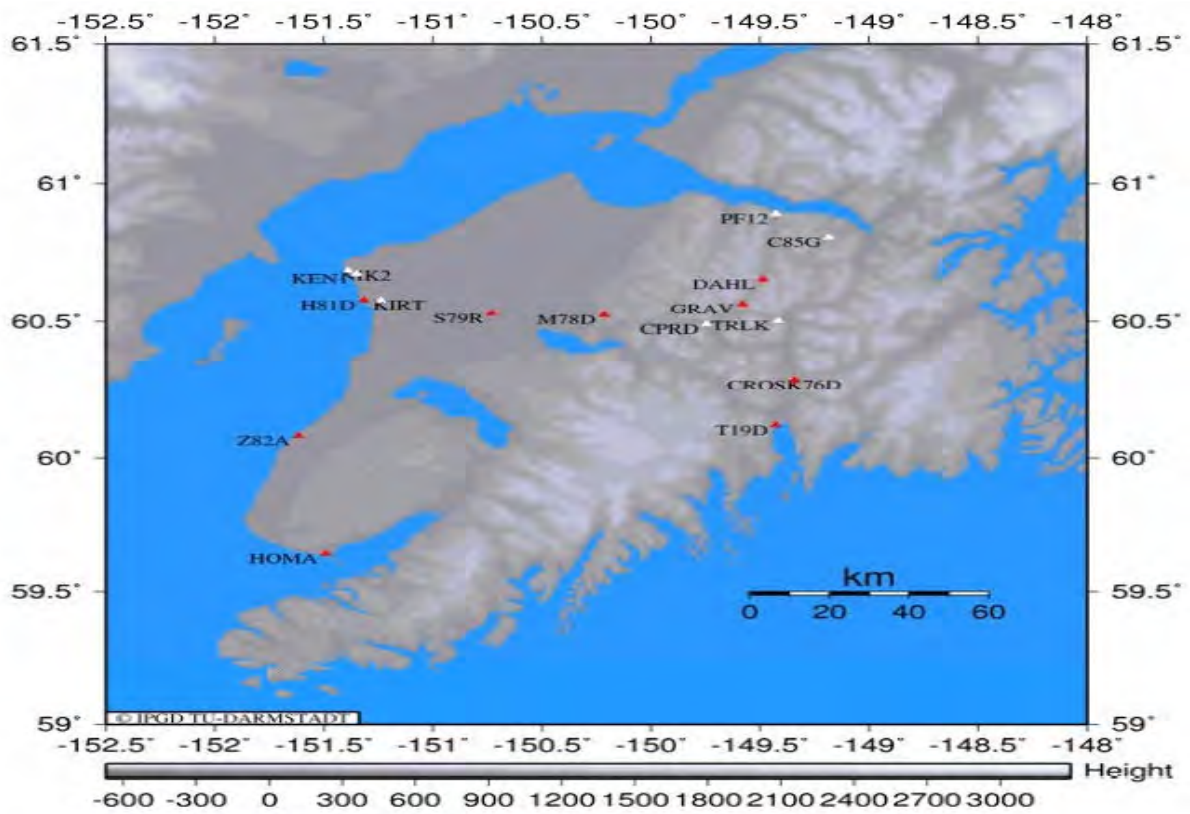
### ۳- منطقه‌ی مطالعاتی و نتایج عددی

منطقه‌ی مطالعاتی در این تحقیق، شبه جزیره کنای واقع در جنوب مرکزی آلاسکا می‌باشد. جنوب مرکزی آلاسکا یکی از فعال‌ترین مناطق پوسته‌ی زمین به لحاظ تکتونیکی است. حدود ۸۰٪ از زمین‌لرزه‌های کل دنیا و تقریباً ۷٪ از کل انرژی لرزه‌ای آزاد شده در اثر زمین‌لرزه-هایی که سالانه در زمین رخ می‌دهد مربوط به این بخش از

<sup>۱</sup> Fairbanks  
<sup>۲</sup> Pacific Plate



شکل ۱- تغییر شکل ارتفاعی گنبدی شکل پوسته زمین در شبه جزیره کنای حاصل از مشاهدات GPS، ترازبایی دقیق و ثقل سنجی [۲۰]

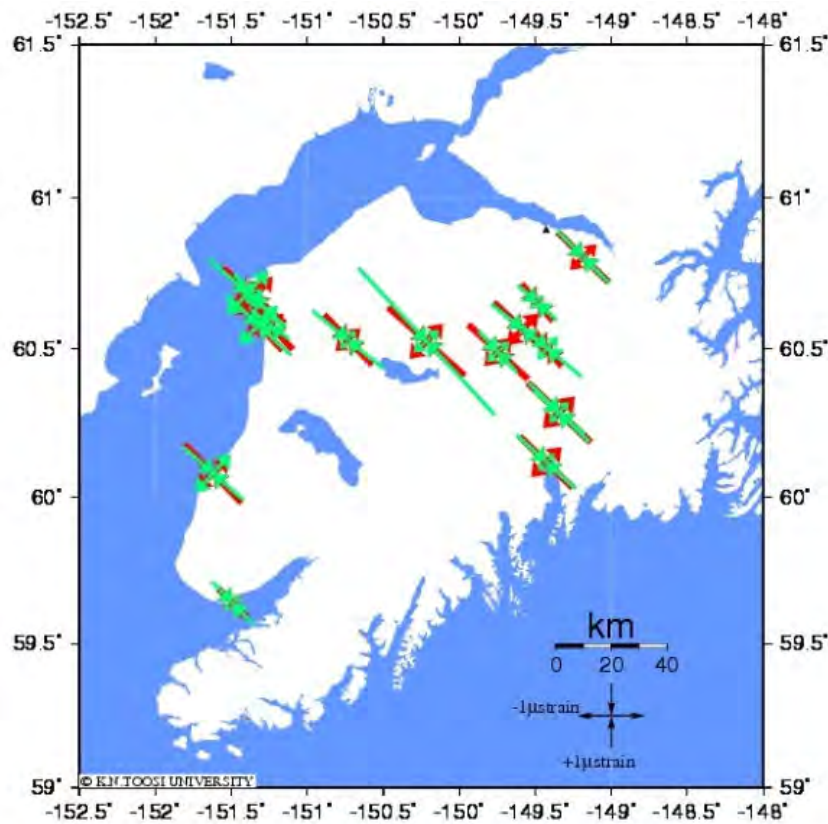


شکل ۲- شبکه GPS موردی مورد استفاده در این تحقیق [۹]



تست باردا<sup>۱</sup> برای شناسایی چنین نقاطی استفاده شده است [۲۱]. جدول ۲، فهرست کاملی از نقاط سهیم، درجه آزادی سرشکنی و عدد شرط ماتریس ضرایب حاصل در آنالیز سه بعدی گرنش نقاط این شبکه را ارائه می‌کند. در این جدول، نقاطی که با خط تیره از سایر نقاط تفکیک شده‌اند نقاطی می‌باشند که به کمک آزمون کشف مشاهدات اشتباه باردا از فرایند سرشکنی حذف شده است. نماد + در این جدول نقاطی را نشان می‌دهد که از آن‌ها در فرایند محاسبه تنسور گرادیان جابجایی استفاده شده است. شکل ۳ میدان تغییرشکل محاسبه شده به روش پیشنهاد شده در این مقاله را نمایش می‌دهد. بردارهای نمایش داده شده در این شکل مولفه‌های اصلی تنسور گرنش را نمایش می‌دهند. بردارهای نمایش داده شده به رنگ سبز، بخش مسطحاتی مولفه‌های اصلی تنسور گرنش سه بعدی به دست آمده از روش پیشنهادی این مقاله و بردارهای قرمز نتایج مشابهی است که با استفاده از روش پایدارسازی محاسبه شده است [۹]. اختلاف بین این دو دسته از نتایج نشان دهنده بایاس ناشی از پایدار سازی جواب است.

با استفاده از روشی که در بخش دوم از این مقاله معرفی شد، تغییرشکل‌های سه بعدی این شبکه بررسی شده است. برای این منظور، در ابتدا ضریب مقیاس  $\lambda$  در هر یک از نقاط شبکه مشخص (رابطه ۲۷) و سپس مؤلفه‌های تنسور گرادیان جابجایی به روش بدون المان ایزوپارامتریک (روابط ۲۰ تا ۲۳ و رابطه ۲۶) محاسبه شده است. جدول ۱ چگونگی محاسبه ضریب مقیاس  $\lambda$  را در نقاط مختلف شبکه گزارش می‌نماید. در ادامه مؤلفه‌های تنسور گرنش از تنسور گرادیان جابجایی استخراج شده است. میزان برازش مدل ریاضی (۲۶) در برآورد کمترین مربعات مؤلفه‌های تنسور گرادیان تغییر شکل با استفاده از آزمون فاکتور ورناس ثابویه مورد ارزیابی قرار گرفته است. الگوی گنبدی شکل تغییرشکل ارتفاعی پوسته‌ی زمین در این منطقه، وجود تغییرشکلی ناهمگن را در این منطقه تایید می‌کند. این موضوع با فرض همگن بودن تغییرشکل در استفاده از مدل ریاضی (۷) و به دنبال آن رابطه (۲۶) سازگار نیست. در نتیجه، بزرگی نسبت  $q_{ki}$  در برخی از نقاط سهیم با بزرگی این نسبت در نقاط سهیم دیگر سازگاری ندارد. در چنین نقاطی، این نسبت را می‌توان به مشاهدات اشتباه تعبیر کرده و آن‌ها را از فرایند سرشکنی کنار گذاشت. در این مقاله از



شکل ۳- مؤلفه‌ی مسطحاتی میدان تغییرشکل

جدول ۲ - نتیجه تست باردا، عددشروط ماتریس ضرایب A و درجه آزادی ایستگاههای شبکه

ایستگاه	نام	FAIR	KODI	KENI	CRSG	CPRD	CROS	DAHL	GRAV	H81D	HOMA	K76D	KIRT	M78D	NIK2	PF12	S79R	T19D	TRLK	Z82A	نام	ایستگاه
عدد شروط	درجه آزادی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	شماره	نام
۹۶۰	۸		+	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	+	۱	FAIR
۹۷۳	۸	+		+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	+	۲	KODI
۱۰	۹	+	+		+	-	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	+	+	+	+	۳	KENI
۲۵۶۶	۴	+	+	+		+	+	+	-	-	-	+	-	-	+	+	-	-	-	+	۴	CRSG
۹	۵	+	+	+	+		-	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	-	۵	CPRD
۲۳	۷	+	+	+	+	+		+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	-	۶	CROS
۴۵۲	۶	+	+	۰	+	+	-		+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	+	۷	DAHL
۳۲۳	۶	+	+	+	+	+	-	+		+	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	۸	GRAV
۳۰	۲	+	+	+	-	+	-	+	-		+	+	+	-	-	-	-	-	+	-	۹	H81D
۱۱	۹	+	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+	-	+	+	+	+	+	+	۱۰	HOMA
۲۲	۶	+	+	+	+	+	-	+	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	+	+	۱۱	K76D
۹۵۶	۱	+	-	۰	-	-	+	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+	-	+	۱۲	KIRT
۱۴۴	۳	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	+	+	-	+	+	+	-	+	-	۱۳	M78D
۳۰	۲	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	-	-	+	-	۱۴	NIK2
۳۰	۳	+	+	۰	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	۱۵	PF12
۹۵	۱۰	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	۱۶	S79R
۱۷	۶	+	+	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	۱۷	T19D
۱۲۹	۳	+	-	۰	+	-	-	+	-	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-	-	۱۸	TRLK
۱۵۷	۶	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-	+	-	+	+	-	+	-	-	-	۱۹	Z82A

در ادامه، در جدول ۱ معیار مورد استفاده برای هر ایستگاه نمایش داده شده است. قابل ذکر است که در این

$$\text{جدول } \max = \max \left\{ \frac{L_{ki}}{\Delta x_{ki}}, \frac{L_{ki}}{\Delta y_{ki}}, \frac{L_{ki}}{\Delta z_{ki}} \right\} \text{ است.}$$

جدول ۱- معیار مورد استفاده برای هر ایستگاه

نام ایستگاه	$\lambda$	نام ایستگاه	$\lambda$
KEN1	$L_y / \Delta x_y$	C85G	$max$
CPRD	$L_y / \Delta x_y$	CROS	$L_y / \Delta y_y$
DAHL	$L_y / \Delta y_y$	GRAV	$L_y / \Delta y_y$
H81D	$L_y / \Delta y_y$	HOMA	$L_y / \Delta y_y$
K76D	$L_y / \Delta y_y$	KIRT	$L_y / \Delta y_y$
M78D	$L_y / \Delta y_y$	NIK2	$L_y / \Delta y_y$
S79R	$L_y / \Delta x_y$	T19D	$L_y / \Delta x_y$
TRLK	$L_y / \Delta y_y$	Z82A	$L_y / \Delta x_y$

در جدول ۳ مقادیر مؤلفه‌های اصلی کرنش نمایش داده شده و شکل ۴ را به همراه مقادیر اتساع سه‌بعدی مربوطه گزارش می‌کند. علاوه بر این، جزئیات مربوط به خطاهای پایدار- سازی قابل مشاهده‌ی این شکل در جدول ۴ ارائه شده است. نمایش هم‌زمان بخش مسطحاتی مؤلفه‌های اصلی تنسور کرنش با مقادیر اتساع سه‌بعدی ( $\Delta$ ) که از معادله زیر محاسبه می‌شوند:

$$\Delta = e_I + e_{II} + e_{III} = \text{trace}(\mathbf{E}) \quad (28)$$

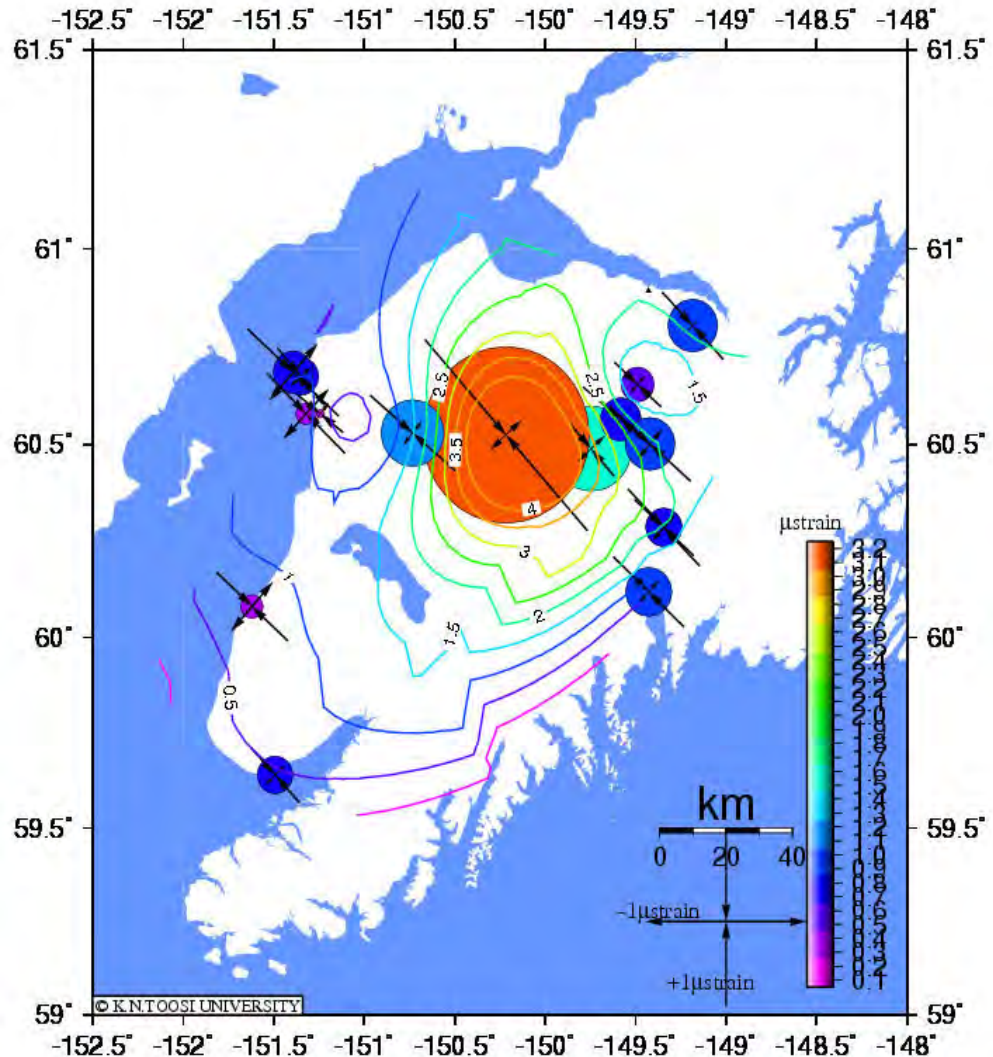
تصویر روشن‌تری را در خصوص چگونگی یا الگوی تغییر- شکل سطحی پوسته‌ی زمین در این منطقه در اختیار می- گذارد. الگوی سه‌بعدی تغییرشکل حاصل از این روش، وقوع تغییرشکلی غیرهمگن را در منطقه کنای تایید می‌کند. علاوه بر این، حداکثر فشارش محاسبه شده در بخش مرکزی این شبکه (نقطه M78D) با بیشینه بالآمدگی گزارش شده در [۲۰] و حداکثر فشارش مشاهده شده در [۹] همخوانی دارد.

در ادامه و به منظور بررسی اثر تغییرشکل ارتفاعی بر مقادیر تغییرشکل مسطحاتی در این منطقه، با استفاده از رابطه (۱)، تنسور کرنش مسطحاتی در کلیه نقاط این شبکه محاسبه شده است. شکل ۵ نتایج حاصل از این محاسبات را نمایش می‌دهد. بردارهای نمایش داده شده در این شکل مقادیر اصلی کرنش (مقادیر ویژه تنسور کرنش) و دایره‌های نمایش داده شده در این شکل میزان فشارش محاسبه شده در هر نقطه را مشخص می‌کنند جزئیات مربوط به مقادیر عددی این محاسبات در جدول ۵ ارائه شده است. در این جدول  $e_I$  و  $e_{II}$  مقادیر اصلی تنسور کرنش است که از تجزیه این تنسور به مقادیر ویژه آن به دست می‌آید. مقدار فشارش در هر نقطه از رابطه ذیل محاسبه می‌شود:

$$\Delta = e_I + e_{II} = \text{trace}(\mathbf{E}) \quad (29)$$

جدول ۳- نتایج مقادیر ویژه‌ی آنالیز تغییرشکل سه‌بعدی در کنای با استفاده از روش پیشنهاد شده در این تحقیق

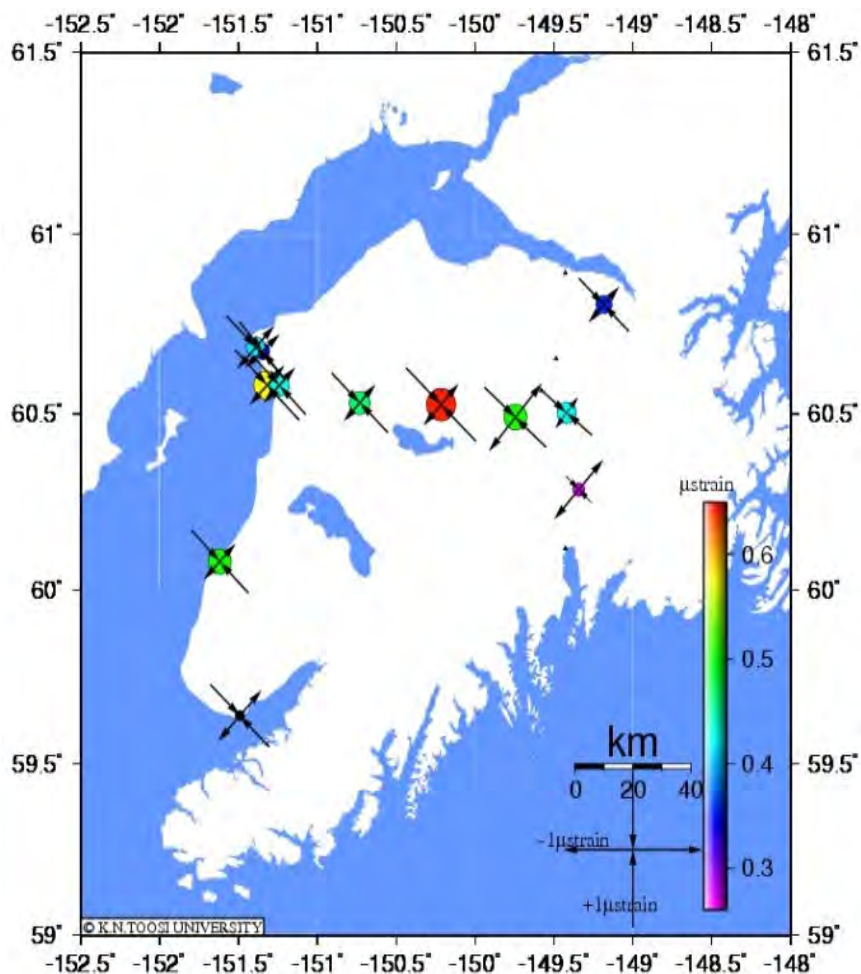
ایستگاه		مؤلفه‌های مسطحاتی اصلی تنسور کرنش به همراه دقت آن‌ها (میکرو-استرین) ( $\mu - strain$ )					فشارش (میکرو-استرین) ( $\mu - strain$ )	
نام	شماره	$e_I$	$\sigma_{e_I}$	$e_{II}$	$\sigma_{e_{II}}$	آزموت حداکثر فشردگی	$\Delta$	$\sigma_{\Delta}$
KEN1	۳	۰/۳۳۷	۰/۱۴۵	-۰/۸۹۰	۰/۱۴۸	-۱۳۱/۹۵۱	-۰/۶۷۱	۰/۲۳۷
C85G	۴	۰/۱۷۳	۰/۱۵۲	-۱/۱۰۳	۰/۱۵۴	-۱۳۴/۶۵۳	-۰/۹۵۹	۰/۲۱۶
CPRD	۵	۰/۴۶۰	۰/۱۲۸	-۰/۸۶۰	۰/۱۶۳	-۱۳۲/۹۶۷	-۱/۵۳۴	۰/۲۳۵
CROS	۶	۰/۱۵۳	۰/۱۵۳	-۱/۲۷۵	۰/۱۷۱	-۱۳۵/۶۱۲	-۰/۳۱۵	۰/۲۶۹
DAHL	۷	۰/۲۷۷	۰/۱۵۶	-۰/۷۸۹	۰/۲۳۱	-۱۳۸/۶۰۸	-۰/۶۳۱	۰/۳۰۴
GRAV	۸	۰/۱۶۳	۰/۱۵۳	-۱/۲۱۸	۰/۲۳۸	-۱۴۱/۵۹۹	-۰/۷۸۱	۰/۵۴۸
H81D	۹	۰/۸۲۰	۰/۱۴۳	-۱/۳۴۱	۰/۱۵۴	-۱۳۶/۱۳۶	-۰/۳۹۴	۰/۲۱۸
HOMA	۱۰	۰/۳۳۸	۰/۱۲۴	-۰/۸۹۱	۰/۲۳۱	-۱۳۳/۸۴۲	-۰/۶۸۰	۰/۲۸۸
K76D	۱۱	۰/۴۳۱	۰/۱۲۱	-۰/۹۸۹	۰/۲۱۳	-۱۳۸/۶۱۱	-۰/۷۰۸	۰/۲۵۰
KIRT	۱۲	۰/۳۳۴	۰/۰۸۶	-۰/۷۱۳	۰/۱۰۳	-۱۴۲/۷۸۳	-۰/۱۵۹	۰/۱۴۴
M78D	۱۳	۰/۵۱۵	۰/۱۸۵	-۳/۰۳۲	۰/۲۴۲	-۱۳۲/۶۶۶	-۳/۱۶۳	۰/۳۷۱
NIK2	۱۴	۰/۹۱۱	۰/۱۰۹	-۱/۵۳۳	۰/۱۷۹	-۱۳۸/۶۳۹	-۰/۷۷۷	۰/۲۱۶
S79R	۱۶	۰/۳۶۸	۰/۱۵۸	-۱/۳۸۸	۰/۲۳۷	-۱۴۰/۴۶۷	-۱/۲۰۳	۰/۳۰۷
T19D	۱۷	۰/۳۶۳	۰/۱۶۷	-۱/۲۱۲	۰/۲۳۴	۱۳۷/۶۰۹	-۰/۸۸۶	۰/۲۸۸
TRLK	۱۸	۰/۴۷۰	۰/۱۶۳	-۱/۳۳۶	۰/۲۴۵	-۱۳۹/۵۶۲	-۰/۸۲۵	۰/۲۹۶
Z82A	۱۹	۰/۷۹۴	۰/۱۲۱	-۱/۲۰۸	۰/۲۳۹	-۱۳۸/۹۹۲	-۰/۴۲۹	۰/۲۶۸



شکل ۴- مؤلفه‌های مسطحاتی تنسور کرنش محاسبه شده با روش پیشنهادی در این مقاله و مقادیر اتساع سه‌بعدی مربوطه

جدول ۴- اختلاف نتایج مقادیر ویژه ی آنالیز تغییرشکل سه‌بعدی در کنای از روش جدید و روش پایدارسازی

فشارش (میکرو-استرین) ( $\mu - strain$ )	خطای پایدارسازی (میکرو-استرین) ( $\mu - strain$ )		ایستگاه	ایستگاه
$ \Delta^{Reg} - \Delta $	$ e_{II}^{Reg} - e_{II} $	$ e_I^{Reg} - e_I $	شماره	نام
۰/۱۲۰	۰/۹۱۲	۰/۰۷۵	۳	KEN1
۰/۰۰۲	۰/۹۱۳	۰/۵۴۸	۴	C85G
۰/۲۵۵	۰/۷۶۳	۰/۲۵۷	۵	CPRD
۰/۶۱۵	۱/۰۴۳	۰/۶۵۴	۶	CROS
۰/۰۲۹	۰/۴۶۱	۰/۵۱۵	۷	DAHL
۰/۱۸۷	۱/۰۳۵	۰/۵۵۲	۸	GRAV
۰/۳۹۸	۰/۲۳۳	۰/۸۵۸	۹	H81D
۰/۱۲۱	۰/۹۱۰	۰/۰۷۶	۱۰	HOMA
۰/۳۷۹	۰/۸۸۰	۰/۳۰۷	۱۱	K76D
۰/۲۸۰	۰/۶۶۶	۰/۱۹۳	۱۲	KIRT
۱/۳۳۴	۱/۰۲۹	۲/۳۰۰	۱۳	M78D
۰/۱۵۵	۰/۱۳۷	۰/۹۹۳	۱۴	NIK2
۰/۴۳۸	۰/۶۸۱	۰/۸۷۵	۱۶	S79R
۰/۳۷۳	۰/۷۶۱	۰/۵۶۹	۱۷	T19D
۰/۳۷۱	۰/۲۲۳	۱/۰۸۷	۱۸	TRLK
۰/۲۱۲	۰/۴۴۴	۰/۵۳۸	۱۹	Z82A



شکل ۵- مؤلفه‌های اصلی کرنش محاسبه شده به روش ایزوپارامتریک در دو بعد به همراه مقادیر اتساع دوبعدی مربوطه

جدول ۵- مؤلفه‌های اصلی کرنش ( $e_{II}$  و  $e_I$ ) به همراه دقت هریک از آنها ( $\sigma_{e_{II}}$  و  $\sigma_{e_I}$ ) حاصل از آنالیز دوبعدی تغییرشکل در منطقه

فشارش (میکرو-استرین) ( $\mu - strain$ )		مؤلفه‌های مسطحاتی اصلی تنسور کرنش به همراه دقت آن‌ها (میکرو-استرین) ( $\mu - strain$ )					ایستگاه	
$\sigma_{\Delta}$	$\Delta$	آزموت حداکثر فشردگی	$\sigma_{e_{II}}$	$e_{II}$	$\sigma_{e_I}$	$e_I$	شماره	نام
۰/۱۲۶	-۰/۳۵۱	۱۳۳/۱۷	۰/۰۹۱	-۰/۹۹۰	۰/۱۷۳	۰/۶۳۸	۳	KEN1
۰/۳۸۵	-۰/۴۴۴	۱۳۳/۱۴	۰/۳۱۳	-۰/۸۷۵	۰/۱۵۹	۰/۴۳۱	۴	C85G
۰/۱۷۸	-۰/۷۳۲	۱۳۳/۵۰	۰/۱۱۵	-۱/۰۲۰	۰/۱۵۳	۰/۲۸۷	۵	CPRD
۰/۲۵۹	-۰/۸۵۱	۱۳۰/۱۱	۰/۲۳۲	-۱/۰۸۱	۰/۱۵۷	۰/۲۳۰	۶	CROS
۰/۱۹۸	-۰/۶۶۹	۱۳۰/۰۱	۰/۱۷۲	-۰/۸۱۳	۰/۰۷۶	۰/۱۴۳	۷	DAHL
۰/۵۱۹	-۰/۷۹۸	۱۳۰/۳۲	۰/۳۴۸	-۱/۱۵۴	۰/۳۱۶	۰/۳۵۵	۸	GRAV
۰/۳۲۴	-۰/۳۶۴	۱۳۷/۳۴	۰/۴۲۶	-۱/۰۸۳	۰/۳۵۹	۰/۷۱۹	۹	H81D
۰/۴۵۲	-۰/۴۷۴	۱۳۶/۰۴	۰/۳۵۸	-۰/۷۴۹	۰/۱۶۰	۰/۲۷۴	۱۰	HOMA
۰/۳۴۲	-۰/۸۸۱	۱۳۰/۲۲	۰/۲۵۱	-۱/۱۴۶	۰/۱۱۴	۰/۲۶۴	۱۱	K76D
۰/۳۱۲	-۰/۳۱۲	۱۴۱/۱۰	۰/۲۳۱	-۰/۸۸۵	۰/۱۵۲	۰/۵۷۳	۱۲	KIRT
۰/۵۴۱	-۱/۰۴۲	۱۳۳/۳۰	۰/۴۲۱	-۱/۴۰۴	۰/۳۵۲	۰/۳۶۱	۱۳	M78D
۰/۱۶۹	-۰/۴۳۸	۱۴۲/۶۳	۰/۱۵۸	-۰/۹۱۶	۰/۱۵۳	۰/۴۷۸	۱۴	NIK2
۰/۲۸۱	-۰/۴۷۷	۱۳۶/۷۷	۰/۳۶۰	-۰/۸۰۷	۰/۳۰۸	۰/۳۳۰	۱۶	S79R
۰/۳۰۱	-۰/۸۳۳	۱۲۶/۵۶	۰/۲۳۲	-۱/۳۱۷	۰/۲۴۲	۰/۴۸۳	۱۷	T19D
۰/۱۶۷	-۰/۶۳۰	۱۳۲/۳۷	۰/۱۴۶	-۰/۸۰۹	۰/۰۸۶	۰/۱۷۹	۱۸	TRLK
۰/۲۴۵	-۰/۵۸۷	۱۳۸/۱۱	۰/۵۸۶	-۱/۰۸۰	۰/۳۱۳	۰/۴۹۲	۱۹	Z82A

الگوی سه بعدی تغییرشکل به دست آمده با روش پیشنهاد شده در این تحقیق از ویژگی‌های زیر برخوردار است:

۱- این نتایج وجود میدان تغییرشکلی غیرهمگن را در این منطقه تایید می‌کند. این موضوع با نتایج گزارش شده در [۲۰] همخوانی دارد.

۲- محل حداکثر فشارش محاسبه شده با روش پیشنهاد شده در این تحقیق (ایستگاه M78D) با محل حداکثر فشارش محاسبه شده در [۹] همخوانی دارد.

۳- منحنی‌های میزان ترسیم شده یا استفاده از مولفه سوم تنسور تغییر شکل الگوی گنبدی شکل تغییرشکل پس لرزه پوسته‌ی زمین در فاز را تایید می‌کند [۲۰].

۴- علاوه بر این روش حل مسئله در این تحقیق در محاسبه تنسور استرین سه بعدی، روش سرشکنی کمترین مربعات بوده و هدف در سرشکنی کمترین مربعات مینیمم کردن نرم باقیمانده‌های جواب می‌باشد. پس نتیجه حاصل از روش سرشکنی کمترین مربعات هیچ اربیی از مقدار واقعی ندارد. این در حالی بوده که در روش‌های پایدارسازی مینیمم کردن نرم جواب به همراه مینیمم کردن نرم باقیمانده‌های جواب مورد توجه است. در نتیجه جواب حاصل از روش پایدار سازی از مقدار واقعی دارای اربیب می‌باشد. به همین دلیل نتایج حاصل از این تحقیق در محاسبه تنسور استرین سه بعدی دارای نتایج ناریب بوده ولی نتیجه روش‌های پایدارسازی در محاسبه تنسور استرین سه بعدی دارای اربیب از مقدار واقعی می‌باشد.

۵- برخلاف نتایج پیشنهاد شده در [۹]، نتایج این تحقیق دارای خطای پایدارسازی نیست. با این وجود، از آنجا که مدل ریاضی (۷) و به دنبال آن رابطه (۲۶) مبتنی بر فرض همگن بودن تغییرشکل در منطقه مورد نظر است؛ برآوردهای حاصل را صرفاً می‌توان تقریبی از مقادیر واقعی گرنش در هریک ایستگاه‌های شبکه دانست. برای جزئیات بیشتر به [۱۰] مراجعه کنید.

#### ۴- نتیجه گیری

توپوگرافی منطقه و شکل هندسی شبکه می‌تواند به طول بازه‌هایی منتهی گردد که بزرگی برخی از مؤلفه‌های آن‌ها در مقایسه با مؤلفه‌های دیگر بسیار متفاوت است. این ویژگی سبب می‌شود تا در رویکرد ایزوپارامتریک در

تحلیل تغییرشکل، مسئله‌ی مورد بررسی به مسئله‌ای ناپایدار تبدیل گردد. استفاده از روش‌های پایدارسازی برای حل این مسئله قبلاً پیشنهاد و در منطقه مطالعاتی این تحقیق استفاده شده است. در این مقاله با فرموله کردن مدل ریاضی محاسبات در سیستم مختصاتی جدید، این مسئله به مسئله‌ای پایدار تبدیل و جواب آن با استفاده از روش کمترین مربعات محاسبه شده است. مشخصات چنین سیستم مختصاتی از بررسی شرایط ناوردایی تنسور گرادبان تغییرشکل استخراج شده است. نتایج حاصل از آنالیز تغییرشکل سطحی پوسته‌ی زمین به روش پیشنهاد شده در این مقاله با نتایج پیشین به صورت قابل توجهی همخوانی دارد. مقایسه نتایج حاصل با نتایج به دست آمده از آنالیز دوبعدی تغییرشکل در این منطقه (با روشی مشابه) نشان می‌دهد که بزرگی اثر تغییرشکل ارتفاعی بر مؤلفه‌های اصلی مسطحاتی تنسور گرنش به  $1/7$  میکرواسترین می‌رسد. این میزان در رنج بزرگی مقادیر محاسبه شده برای مؤلفه‌های مسطحاتی مذکور در حالت دوبعدی است. بنابراین، صرفنظر کردن از اثر مؤلفه ارتفاعی و بررسی کینماتیک تغییرشکل پوسته‌ی زمین در دو بعد می‌تواند به نتایجی با خطای سیستماتیک قابل ملاحظه منتهی گردد. با این وجود برخی از ویژگی‌های کلی تغییر-شکل در این منطقه نظیر وقوع حداکثر فشارش در بخش مرکزی این شبکه (ایستگاه M78D) همچنان در نتایج حاصل از آنالیز دوبعدی تغییرشکل قابل مشاهده است. علاوه براین، مطالعه میزان بایاس ناشی از پایدارسازی جواب نشان می‌دهد که (حاصل از مقایسه نتایج این تحقیق با نتایج [۱۰]) انتخاب نامناسب پارامتر پایدارسازی می‌تواند به اربیب قابل ملاحظه‌ای در نتایج حاصل منتهی گردد. در این ارتباط، استفاده از خصوصیات یا ویژگی‌های از پیش معلوم الگوی تغییرشکل در یک منطقه نظیر وقوع حداکثر برآمدگی پوسته‌ی در بخش مرکزی شبکه در منطقه مطالعاتی این مقاله قطعاً روش مناسبی برای انتخاب پارامتر پایدارسازی نیست.

علاوه بر این روش حل مسئله در این تحقیق در محاسبه تنسور استرین سه بعدی، روش سرشکنی کمترین مربعات بوده و هدف در سرشکنی کمترین مربعات مینیمم کردن نرم باقیمانده‌های جواب می‌باشد. پس نتیجه حاصل از روش سرشکنی کمترین مربعات هیچ اربیی از مقدار واقعی ندارد. این در حالی بوده که در روش‌های

در محاسبه تنسور استرین سه‌بعدی دارای نتایج نارایب بوده ولی نتیجه روش‌های پایدارسازی در محاسبه تنسور استرین سه‌بعدی دارای ارایب از مقدار واقعی می‌باشد.

پایدارسازی مینیمم کردن نرم جواب به همراه مینیمم کردن نرم باقیمانده‌های جواب مورد توجه است. در نتیجه جواب حاصل از روش پایدار سازی از مقدار واقعی دارای ارایب می‌باشد. به همین دلیل نتایج حاصل از این تحقیق

## مراجع

- [1] Brunner F.K., 1979, "On the analysis of geodetic networks for the determination of the incremental strain tensor." Survey Review XXV 192:56-67.
- [2] Grafarend, E. W. (1986): Three-dimensional deformation analysis: Global vector spherical harmonic and local element representation: Tectonophysics, 130: 337-359.
- [3] Lichtenegger, H., and H. Sünkel (1989): Mathematische-Geophysikalische Model, in Österreichische Beiträge zum Wegener-Medals-Projekt, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, 65: 61-80.
- [4] Wittenburg, R. (2003): Geodetic description of 3D body deformation, in F. W. Krumm, and V. S. Schwarze, eds., Geodesy The Challenge of the 3rd Millennium, Springer Verlag, p. 401-404.
- [5] Altiner, Y. (1999). Analytical Surface Deformation Theory for Detection of the Earth's Crust Movements, Springer.
- [6] Voosoghi, B. (2000) , Intrinsic Deformation Analysis of the Earth Surface Based on 3-Dimensional Displacement Fields Derived From Space Geodetic Measurements. PhD thesis, Institute of Geodesy, Universität Stuttgart, Germany.
- [7] Love, A. E. H. (1944): A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover publications.
- [8] Chen, R. (1991). On the horizontal crustal deformations in Finland. Helsinki, Finish Geodetic Institute.
- [9] Hossainali, M.M., Becker, M., E. Groten E. (2011): Comprehensive Approach to the Analysis of the 3D Kinematics Deformation with application to the Kenai Peninsula, Journal of Geodetic Science.
- [10] Hossainali , M. M. (2005), "A Comprehensive Approach to the 3D-Analysis of Deformation", Ph.D. Thesis, TU-Darmstadt.
- [11] Rainsford, H. F. (1955): Long geodesics on the ellipsoid: Bull. Geod, 37: 12-22.
- [12] Dermanis, A. (2010): A study of the invariance of deformation parameters from a geodetic point of view. In: M.E. Kontadakis, C. Kaltsikis, S. Spatalas, K. Tokmakidis, I.N. Tziavos (eds) The Apple of Knowledge. Volume in honor of Prof. D. Arabelos. Publication of the School of Rural & Surveying Engineering, Aristotle University of Thessaloniki, pp. 43-66.
- [13] Hansen, P. C. (1990). "The Discrete Picard Condition for Discrete Ill-Posed Problems." BIT 30: 658-672.
- [14] Stacy, F. D. (1977). Physics of The Earth, John Wiley and Sons.
- [15] Gutenberg, B. and C. F. Richter (1949). Seismicity of the earth and associated phenomena, Princeton Univ. Press.
- [16] Kanamori, H. (1997). "The energy release in great earthquakes." Journal of Geophysics. Research 82: 2981-2987.
- [17] Parkin, E. (1972). Horizontal crustal movements, in The Great Alaska Earthquake of 1964. Washington D.C., National Academy of Sciences.
- [18] Plafker, G. (1971). "Tectonics, in the Great Alaska Earthquake of 1964." Geology, National Academy of Sciences, Washington, D. C.: 47-122.

- [19] Brown, L. D., R. E. Reilinger, et al. (1977). "Post- seismic crustal uplift near Anchorage, Alaska." J. Geophysics. Res. 82: 3369-3378.
- [20] Cohen, S. C. and J. T. Freymueller (1997). "Deformation on the Kenai Peninsula, Alaska." Journal of Geophysics. Research 102: 20,479-20,487.
- [21] Baarda, W. (1968). "A testing method for use in geodetic networks." Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy 2.
- [22] Jaeger, J. C. (1969): Elasticity Fracture and Flow with Engineering and Geological Applications, Methuen & Co. LTD.